Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **12 de julio de 2021**

1.– De una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe:

- Los vectores $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ son una base de vectores conjugados.

- El vector $(0,1,1)$ está en el núcelo de la forma cuadrática.

- $w(1,1,0) = 2$.

(i) Hallar la matriz asociada a w en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática en función de su rango y signatura.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados. Si es posible, expresarlos como unión de dos planos, dando en la base canónica un generador de cada una de ellas.

(iv) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w, calcular $f((1,1,0),(1,2,-1))$.

(1.2 puntos)

2.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que la forma bilineal f define un producto escalar.

(ii) Obtener una base ortonormal de $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,0),(3,2,1)\}$ respecto del producto escalar f.

(1.2 puntos)

3.– En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que t es una transformación ortogonal.

(ii) Clasificar t indicando, si procede, el ángulo y eje de giro y/o el plano de simetría.

(1 punto)

4.– Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con dos autovalores reales distintos es un giro compuesto con simetría.

(ii) La suma de dos transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.

(iii) En $\mathbb{R}^2$ puede definirse un producto escalar respecto al cuál los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ son ortogonales.

(iv) En $\mathbb{R}^2$ puede definirse un producto escalar respecto al cuál el vector $(1,1)$ tiene norma cero.

(1.2 puntos)

5.– En el plano afín euclideo dar las ecuaciones de un giro que lleva el punto $(2, 1)$ en el punto $(2, -1)$ y tiene el centro sobre la recta $x + 2y - 1 = 0$.

(1 punto)

6.– En en plano afín euclideo:

(i) Calcular el lugar geométrico de puntos del plano cuya distancia a la recta $3x - 4y + 1 = 0$ es el doble de la distancia al eje OX.

(ii) Calcular el área del triángulo que determinan las rectas $x + 2y - 3 = 0$, $2x + y - 6 = 0$ y $x - y = 0$.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 2y = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

(ii) Hallar su centro, ejes y vértices.

(iii) Calcular su excentricidad.

(iv) Hallar las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $P = (1, -1)$.

(1.4 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una parábola tangente a la recta $x + y - 1 = 0$ en el punto $(1, 0)$ y cuyo eje es la recta $x = -1$.

(1.2 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$2xy + 2xz + y^2 + 4yz + 2y + z^2 + 1 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **12 de xullo 2021**

1.– Dunha forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe:

- Os vectores $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ son unha base de vectores conxugados.
- O vector $(0,1,1)$ está no núcelo da forma cuadrática.
- $w(1,1,0) = 2$.

(i) Atopar a matriz asociada a w na base canónica.

(ii) Clasificar a forma cuadrática en función do seu rango e a súa signatura.

(iii) Atopar os vectores autoconxugados. Se é posible, expresalos como unión de dous planos, dando na base canónica un xenerador de cada unha delas.

(iv) Se f é a forma bilineal simétrica asociada a w, calcular $f((1,1,0),(1,2,-1))$.

(1.2 puntos)

2.– Sexa $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ unha forma bilineal de matriz na base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que a forma bilineal f define un producto escalar.

(ii) Obter unha base ortonormal de $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,0),(3,2,1)\}$ respecto do producto escalar f.

(1.2 puntos)

3.– No espazo euclideo $\mathbb{R}^3$ co producto escalar usual se considera o endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matriz asociada na base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que t é unha transformación ortogonal.

(ii) Clasificar t indicando, se procede, o ángulo e eixo de xiro e/ou o plano de simetría.

(1 punto)

4.– Indica razoadamente a falsedade ou veracidade das seguintes cuestións:

(i) Unha transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con dous autovalores reais distintos é un xiro composto con simetría.

(ii) A suma de dous transformacións ortogonais é una transformación ortogonal.

(iii) En $\mathbb{R}^2$ pode definirse un producto escalar respecto ó cal os vectores $(1,1)$ e $(1,0)$ son ortogonais.

(iv) En $\mathbb{R}^2$ pode definirse un producto escalar respecto ó cal o vector $(1,1)$ ten norma cero.

(1.2 puntos)

5.– No plano afín euclideo dar as ecuacións dun xiro que leva o punto $(2,1)$ no punto $(2,-1)$ e ten o centro sobre a recta $x+2y-1=0$.

(1 punto)

6.– No plano afín euclideo:

(i) Calcular o lugar xeométrico de puntos do plano con distancia á recta $3x-4y+1=0$ o dobre da distancia ó eixo OX.

(ii) Calcular a área do triángulo que determinan as rectas $x+2y-3=0$, $2x+y-6=0$ e $x-y=0$.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$x^2-4xy+y^2-2x-2y=0$$

(i) Clasificar a cónica.

(ii) Atopar o seu centro, eixos e vértices.

(iii) Calcular a súa excentricidade.

(iv) Atopar as rectas tanxentes á cónica que pasan polo punto $P=(1,-1)$.

(1.4 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha parábola tanxente á recta $x+y-1=0$ no punto $(1,0)$ e que ten como eixo a recta $x=-1$.

(1.2 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$2xy+2xz+y^2+4yz+2y+z^2+1=0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
