Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **18 de febrero de 2020**

1.– *Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de matriz asociada en la base canónica:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Probar que f es simétrica y hallar $w(x,y)$ siendo w la forma cuadrática asociada a f.*

Dado que $F_C = F_C^t$ la matriz asociada F_C es simétrica. Por tanto la forma bilineal f es simétrica.

Si $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática asociada a f se tiene que:

$$w(x,y) = f((x,y),(x,y)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + 2y^2.$$

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Una base B de vectores conjugados es una base B en la cuál la matriz asociada F_B es diagonal. Dado que el cambio de base de la matriz asociada a una forma cuadrática se rige por la fórmula:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB},$$

corresponde a una relación de congruencia. Entonces para hallar la base pedida diagonalizamos F_C por congruencia y M_{CB} será la matriz de paso por columnas de esa relación.

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz M_{CB} se obtiene realizando sobre la identidad las mismas opereaciones columna realizadas en el proceso anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(1,0),(-2,1)\}.$$

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).*

Hemos visto que la forma diagonal F_B tiene un elemento positivo y otro negativo en la diagonal. Deducimos que la signatura de w es $(1,1)$ y es entonces una forma cuadrática indefinida de rango 2. En ese caso sabemos que los vectores autoconjugados se descomponen como unión de dos hiperplanos (en este caso rectas). Para hallar esa descomposición comenzamos trabajando en coordenadas $(x',y')_B$ respecto de la base de vectores conjugados. El hecho de que la matriz asociada en ese caso sea diagonal facilita las cuentas:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x',y')_B | w((x',y')_B) = 0\} = \left\{ (x',y')_B \middle| \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \{(x',y')_B | x'^2 - 2y'^2 = 0\} = \{(x',y')_B | (x' - \sqrt{2}y')(x' + \sqrt{2}y') = 0\} = \\ &= \{(x',y')_B | x' - \sqrt{2}y' = 0\} \cup \{(x',y')_B | x' + \sqrt{2}y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(\sqrt{2},1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(\sqrt{2},-1)_B\} \end{aligned}$$

Cambiamos de base los generadores de cada recta de la base B a la base canónica C. Tenemos que:

$$M_{CB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\1\end{pmatrix}_C$$
$$M_{CB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\-1\end{pmatrix}_C$$

y en definitiva:

$$autoconj(w)=\mathcal{L}\{(\sqrt{2}-2,1)\}\cup\mathcal{L}\{(\sqrt{2}+2,-1)\}.$$

(iv) *¿Es posible dar una base B' en la cual la matriz asociada a f sea la identidad?. En caso afirmativo hallar B'.*

La forma cuadrática hemos visto que tiene signatura $(1,1)$. Dado que la signatura no depende de la base es imposible que en alguna base la matriz asociada sea la identidad ya que esta tiene signatura $(2,0)$.

(6 puntos)

2.– *Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que 1. Consideramos la forma bilineal:*

$$f:\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad f(p(x),q(x))=p(0)q(1)-\int_0^1 p(x)q(x)dx$$

(i) *Hallar la matriz F_C asociada a f en la base canónica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.*

La base canónica es $C=\{1,x\}$. Por definición la matriz asociada es:

$$F_C=\begin{pmatrix}f(1,1)&f(1,x)\\f(x,1)&f(x,x)\end{pmatrix},$$

donde

$$f(1,1)=1\cdot 1-\int_0^1 1dx=1-1=0$$
$$f(1,x)=1\cdot 1-\int_0^1 xdx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$f(x,1)=0\cdot 1-\int_0^1 xdx=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$f(x,x)=0\cdot 1-\int_0^1 x^2dx=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

y así:

$$F_C=\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&-1/3\end{pmatrix},$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a f en la base $B=\{1-x,1+x\}$.*

Se tiene que:

$$1-x=(1,-1)_C,\qquad 1+x=(1,1)_C,\qquad M_{CB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B=M_{CB}^tF_CM_{CB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&4/3\\-2/3&-1/3\end{pmatrix}.$$

(3 puntos)

3.– *Si $w : V \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática indefinida. ¿Podemos asegurar que existe un vector $\vec{v}$ no nulo tal que $w(\vec{v}) = 0$?.*

Si. Si es indefinida existe una base en la cual diagonaliza y en la diagonal al menos existe un término positivo y otro negativo. Cambiando de orden las filas y columnas si es necesario y multiplicándolas por ciertos números, podemos asegurar que tales números son 1 y -1 y aparecen en los dos primeros términos de la diagonal.

En otras palabras por ser indefinida existe una base B en la cuál la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$w((1,1,0,\dots,0)_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_B F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B = 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot (-1) = 0.$$

(1 punto)