Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (2 horas 45 minutos) **13 de julio de 2020**

1.– *Sea $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática* **no degenerada** *en $\mathbb{R}^3$ y F_C su matriz asociada en la base canónica. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si todos los elementos de la diagonal de F_C son positivos entonces w es definida positiva.* (0.5 puntos)

FALSO. Por ejemplo si $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se cumple que todos sus elementos en la diagonal son positivos. Sin embargo si la diagonalizamos por congruencia para clasificarla llegamos a:

$$F_C \overset{H_{32}(-1)\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, vemos que su signatura es $(2,1)$ y por tanto es no degenerada pero indefinida. NO es definida positiva.

(ii) *Si algún elemento de la diagonal de F_C es nulo entonces w es indefinida.* (0.5 puntos)

VERDADERO. Por ser no degenerada sólo puede ser definida positiva, definida negativa o indefinida.

Pero recordemos que los elemenos de la diagonal son $(F_C)_{i,i} = f(e_i, e_i) = w(e_i)$ siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ los vectores de la base canónica. Si es definida positiva se cumpliría $w(e_i) > 0$, es decir, los elementos de la diagonal serían positivos. Análogamente si fuese definida negativa los elementos de la diagonal serían negativos. Por tanto si alguno es nulo la única posibilidad es que sea indefinida.

(iii) *F_C^2 es la matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva.* (0.5 puntos)

VERDADERO. Dado que F_C está asociada a una forma cuadrática es simétrica. Por tanto F_C^2 es también simétrica.

Para que sea definida positiva hay que comprobar que si $u \neq 0$ entonces $u^t F_C^2 u > 0$. Pero:

$$u^t F_C^2 u = u^t F_C F_C u = u^t F_C^t F_C u = (F_C u)^t (F_C u) = \|F_C u\|^2$$

donde la norma es con el producto escalar usual. Dado que F_C es no degenerada tiene rango máximo y si $u \neq 0$ entonces $F_C u \neq 0$. Por tanto, $\|F_C u\|^2 > 0$ y probamos lo que queríamos.

(iv) *Si $F_C = Id$ entonces $f((x_1, x_2, x_3)_B, (y_1, y_2, y_3)_B) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w, en una base B.* (0.5 puntos)

VERDADERA. La matriz asociada a la forma bilineal dada en la base B es $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Para que dos matrices simétricas puedan corresponder a la misma forma bilineal tienen que ser congruentes, es decir, tener la misma signatura. La signatura de $F_C = Id$ es obviamente $(3,0)$. Para F_B la hallamos diagonalizando por congruencia:

$$F_B \overset{H_{31}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que $sign(f) = (3,0)$ y por tanto F_B es congruente con F_C.

(v) *$f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + yx' + yy' + zz'$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w.* (0.5 puntos)

FALSO. La matriz asociada a f es

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango < 3 (ya que las dos primeras filas son iguales) y así es degenerada; por tanto es imposible que esté asociada a w en base alguna ya que w es NO degenerada.

(2.5 puntos)

2.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:*

(i) *De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica* $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. *Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geométricamente como actúa.* (1 punto)

Trabajamos en la base canónica y con el producto escalar usual, es decir, respecto a una base ortonormal. Por tanto la condición para que $T_C^t TC{=}Id$. Basta hacer las cuentas y comprobarlo.

Para clasificarla comenzamos calculando su determinante. Si es 1 es un giro. Si es -1 es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

$$det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot det \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}} = -1.$$

Es entonces un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

El semieje de giro está generado por un autovector asociadalo al autovalor 1:

$$(T_C + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = (1 + 1/\sqrt{2})x + y/2 + z/2 \\ 0 = (1 - 1/\sqrt{2})y + z/\sqrt{2} \\ 0 = -x/\sqrt{2} + y/2 + 3z/2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $S_1 = \mathcal{L}\{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})\}$.

El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos \frac{tr(T_C) + 1}{2} = \pm arcos \frac{3}{4}.$$

El signo del ángulo coincide con la orientación de una base formada por el semije, un vector cualquiera y su imagen:

$$B' = \{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2}), (1, 0, 0), T_C(1, 0, 0)^t\} = \{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2}), (1, 0, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\};$$

entonces:

$$signo(\alpha) = signo \begin{vmatrix} 3 - 2\sqrt{2} & 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = signo(\sqrt{2}) = +$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje. Resumiendo: se trata de un giro de ángulo $+arcos\frac{3}{4}$ con respecto al semieje generado por $(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})$ compuesto con una simetría respecto al plano $(3 - 2\sqrt{2})x + y + (1 - \sqrt{2})z = 0$.

(ii) *Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación* $x + y - z = 0$. (1 punto)

Comenzamos calculando una base formada por los generadores del plano de simetría y un vector ortogonal a él. Este último puede ser el vector normal al plano, formado por los coeficientes de la ecuación implícita $(1, 1, -1)$.

Los otros dos lo obtenemos resolviendo paramétricamente la ecuación dada:

$$x + y - z = 0 \Rightarrow y = -x + z$$

de donde:

$$x = a, \quad y = -a + b, \quad z = b$$

y los generadores son $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Entonces tomamos:

$$B = \{\underbrace{(1, -1, 0), (0, 1, 1)}_{plano}, \underbrace{(1, 1, -1)}_{plano^{\perp}}\}$$

En tal base:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente lo cambiamos a la canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B (M_{CB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta* (0.5 puntos).

Es imposible. La composición de dos giros es un giro, porque ambas son transformaciones directas con matriz asociada de determinante positivo. Sin emnbargo una simetría respecto a un plano es una transformación inversa, con determinante negativo.

(2.5 puntos)

3.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^2$ *se consideran los puntos* $A = (0,0)$, $B = (8,6)$.

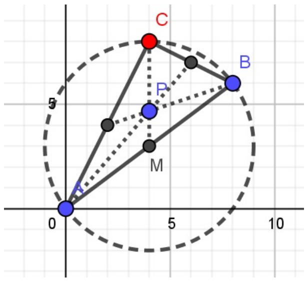
(i) *Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos del plano* C *que hacen que* AB *sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo* ABC. (0.9 puntos)

Sea $C = (x, y)$ las coordenadas del punto C. Para que el triángulo ABC sea rectángulo con hipotenusa AB, los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ han de ser ortgonales:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \iff (x-0, y-0) \cdot (x-8, y-6) = 0 \iff x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0 \iff (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

Se trata de una circunferencia de centro $(4,3)$ y radio 5.

(ii) *Si* $P = (4, 14/3)$ *es el baricentro de uno de los triángulos indicados en el apartado anterior hallar su área y perímetro.* (0.9 puntos)



El baricentro es la intersección de las medianas, es decir, las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto medio del lado AB es:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(0,0)+(8,6)}{2} = (4,3).$$

El vértice C pertenece a la mediana MP y por tanto podemos hallarlo como interescción de tal recta y del lugar geométrico calculado en 1. La recta MP tieene por ecuación $x - 4 = 0$. Sustituimos en la eucación de la cónica y:

$$(4-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow y = 3 \pm 5$$

Dado que el baricentro está en el semiplano superior $y > 0$ y así $C = (4, 3+5) = (4, 8)$.

Entonces los lados del triángulo miden:

$$AB = \sqrt{(8-0)^2 + (6-0)^2} = 10, \quad AC = \sqrt{(4-0)^2 + (8-0)^2} = 4\sqrt{5}, \quad BC = \sqrt{(8-4)^2 + (6-8)^2} = 2\sqrt{5}.$$

De donde:

$$\text{perímetro} = AB + AC + BC = 10 + 6\sqrt{5}$$

y por ser rectángulo el área:

$$\text{área} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 20.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleva el punto* A *en el punto* B *y el punto* B *en el punto* A. (0.7 puntos)

Dado que la homotecia intercambia los puntos A y B la longitud del segmento AB se mantiene invariante. Por tanto la razón tiene que cumplor $|k| = 1$. Como la homotecia no es la identidad, $k = -1$. Si Q es el centro se tiene que cumplir que:

$$B = f(A) = Q - 1(A - Q) \Rightarrow 2Q = A + B \Rightarrow Q = \frac{A+B}{2} = M = (4,3).$$

Se trata entonces de una homotecia de centro $(4,3)$ y razón -1. Sus ecuaciones son:

$$f(x,y) = (4,3) - ((x,y) - (4,3)) = (8 - x, 6 - y).$$

(2.5 puntos)

4.– *En el plano afín se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.* (0.5 puntos)

Para clasificar la cónica estudiamos los signos de los determinantes de la matriz asociada y de la matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde $det(A) = -k^2$ y $det(T) = 1 - k^2$. Vemos donde se anulan para ver los valores de k límite en los cuáles se puede producir cambio de signo:

$$-k^2 = 0 \iff k = 0, \qquad\qquad 1 - k^2 = 0 \iff k = \pm 1.$$

Entonces queda:

k	$\lvert T\rvert$	$\lvert A\rvert$	Tipo de cónica
$k < -1$	$-$	$-$	hipérbola
$k = -1$	0	$-$	parábola
$-1 < k < 0$	$+$	$-$	elipse
$k = 0$	$+$	0	rectas imaginarias cortándose en punto real
$0 < k < 1$	$+$	$-$	elipse
$k = 1$	0	$-$	parábola
$k > 1$	$-$	$-$	hipérbola

(ii) *Para $k = 2$ y $k = -1$ hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad.* (1 punto)

Comenzamos con $k = 2$. Vimos que es una hipérbola. En ese caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El centro es el punto (r, s) verificando:

$$A \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \iff r + 2s = 0, \quad 2r + s + 2 = 0$$

Resolviendo queda $(r, s) = (-4/3, 2/3)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = (1 - \lambda)^2 - 2^2 = (3 - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Por tanto los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Los autovectores quedan:

- Asociado a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0 \Rightarrow S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

- Asociado a $\lambda_2 = 3$:

$$(T - 3Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + 2y = 0 \Rightarrow S_3 = \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

Sus rectas polares son los ejes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y + 2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x + 3y + 2 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asintóticas. Estas son vectores (p, q) cumpliendo:

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \iff p^2 + 4pq + q^2 = 0 \iff p = -2q \pm \sqrt{(2q)^2 - q^2} = (-2 \pm \sqrt{3})q$$

Tomando $q = 1$ nos quedan las direcciones asintóticas $(-2+\sqrt{3}, 1)$ y $(-2-\sqrt{3}, 1)$. Las asíntotas son sus correspondientes rectas polares:

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (-3+2\sqrt{3})y + 2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (3+2\sqrt{3})y - 2 = 0.$$

Para la excentricidad escribimos en forma reducida la hipérbola como:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0, \qquad d = det(A)/det(K)$$

Tomamos como λ_1 el autovalor con el mismo signo que $det(A)$; en este caso negativo. Nos queda:

$$-x'^2 + 3y'^2 + \frac{4}{3} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x'^2}{4/3} - \frac{y'^2}{4/9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4/3, \quad b^2 = 4/9.$$

De donde:

$$excentricidad = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{4/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Para $k = -1$ sabemos que es una parábola. En ese caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La excentricidad es 1 y no tiene ni centro ni asíntotas.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al único autovalor no nulos de T. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = (1-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda(\lambda - 2).$$

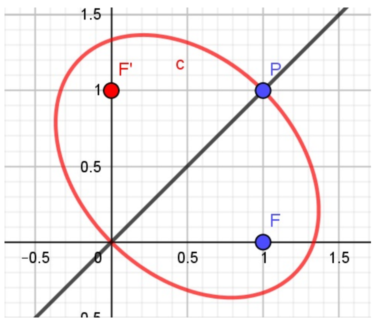
El autovalor no nulo de T es $\lambda_1 = 2$ y su autovector asociado:

$$(T - 2 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y = 0 \Rightarrow S_2 = \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

y su recta polar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 1 = 0.$$

(iii) *Calcular la ecuación de una elipse que tiene un foco en el punto $F(1,0)$, un eje es la recta $x - y = 0$ y pasa por el punto $(1,1)$.* (1 punto)



Calcularemos el segundo foco F' como simétrico del primero respecto del eje. Luego usaremos la definición de elipse como lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es constante.

Sea $F' = (x_0, y_0)$. Por ser el simétrico del primero respecto de la recta $x - y = 0$ cumple:

i) $\dfrac{F+F'}{2} \in eje \Rightarrow \dfrac{x_0+1}{2} - \dfrac{y_0}{2} = 0 \iff x_0 - y_0 + 1 = 0.$

ii) $\vec{FF'} \perp eje$, es decir, $(x_0 - 1, y_0)$ es paralelo al vector normal $(1,-1)$ del eje. De ahí: $x_0 + y_0 - 1 = 0$.

Resolviendo se obtiene $F' = (x_0, y_0) = (0, 1)$.

La ecuación de la elipse es entonces:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=cte$$

Para hallar la constante imponemos que la cónica pasa por el punto dado $(1,1)$:

$$\sqrt{(1-1)^2+1^2}+\sqrt{1^2+(1-1)^2}=cte \Rightarrow cte=2.$$

Obtenemos:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$x^2-2x+1+y^2=4+x^2+y^2-2y+1-4\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=x-y+2$$

Elevando de nuevo:

$$4x^2+4y^2-8y+4=x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$$

y simplificando:

$$3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0.$$

(2.5 puntos)