Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (2 horas 45 minutos) **13 de julio de 2020**

<u>*Normas* :</u>

1) Al incorporarse a la reunión, indicar por escrito en el en chat de Teams la asistencia al examen.

2) En la primera hoja del examen deberá constar firmada la siguiente declaración:

D./Dña... estudiante de la asignatura Álgebra Lineal II, del Grado de Tecnología de la Ingeniería Civil, declara por su honor que ha realizado este examen sin ayuda de otras personas y respetando las normas establecidas.

A Coruña, 13 de Julio de 2020.

3) Al finalizar el examen debe de enviarse escaneado en formato PDF, por moodle, Teams o correo electrónico. Se comunicará el envío al profesor responsable, esperando a que éste confirme la correcta recepción.

4) Durante el examen pueden preguntarse dudas en el grupo de Teams, bien sea por escrito o por micrófono, de manera pública o si se considera necesario, privada.

5) Ante cualquier imprevisto o problema de conexión podéis contactar con el profesor responsable en el número 881 011 462.

6) Durante el examen puede consultarse la hoja resumen de cónicas y el cuadro de clasificación de cuádricas.

Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (2 horas 45 minutos) **13 de julio de 2020**

1.– Sea $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática **no degenerada** en $\mathbb{R}^3$ y F_C su matriz asociada en la base canónica. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) Si todos los elementos de la diagonal de F_C son positivos entonces w es definida positiva. (0.5 puntos)

(ii) Si algún elemento de la diagonal de F_C es nulo entonces w es indefinida. (0.5 puntos)

(iii) F_C^2 es la matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva. (0.5 puntos)

(iv) Si $F_C = Id$ entonces $f((x_1, x_2, x_3)_B, (y_1, y_2, y_3)_B) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w, en una base B. (0.5 puntos)

(v) $f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + yx' + yy' + zz'$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w. (0.5 puntos)

(2.5 puntos)

2.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:

(i) De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geométricamente como actúa. (1 punto)

(ii) Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación $x + y - z = 0$. (1 punto)

(iii) ¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta (0.5 puntos).

(2.5 puntos)

3.– En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $A = (0, 0)$, $B = (8, 6)$.

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos del plano C que hacen que AB sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC. (0.9 puntos)

(ii) Si $P = (4, 14/3)$ es el baricentro de uno de los triángulos indicados en el apartado anterior hallar su área y perímetro. (0.9 puntos)

(iii) Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleva el punto A en el punto B y el punto B en el punto A. (0.7 puntos)

(2.5 puntos)

4.– En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de k (0.5 puntos)

(ii) Para $k = 2$ y $k = -1$ hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad. (1 punto)

(iii) Calcular la ecuación de una elipse que tiene un foco en el punto $F(1, 0)$, un eje es la recta $x - y = 0$ y pasa por el punto $(1, 1)$. (1 punto)

(2.5 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (2 horas 45 minutos) **13 de xullo de 2020**

<u>*Normas :*</u>

1) Ó chegaren á reunión, indicar por escrito no chat de Teams a asistencia ó exame.

2) Na primeria folla do exame deberá constar firmada a seguinte declaración:

D./Dña.. estudiante da asignatura Álxebra Lineal II, do Grao de Tecnoloxía da Enxeñería Civil, declara pola súa honra que realizou este exame sen axuda doutras persoas e respetando as normas establecidas.

A Coruña, 13 de Xullo de 2020.

3) Ó finalizar o exame debe de enviarse escaneado en formato PDF, por moodle, Teams ou correo electrónico. Comunicarase o envío ó profesor responsable, esperando a que éste confirme a correcta recepción.

4) Durante o exame poden preguntarse dudas no grupo de Teams, ben sexa por escrito ou por micrófono, de manera pública ou si se considera necesario, privada.

5) Ante calqueira dúbida, imprevisto ou problema de conexión podedes contactar co profesor responsable no número 881 011 462.

6) Durante o exame pode consultarse a folla resumen de cónicas e o cadro de clasificación de cuádricas.

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (2 horas 45 minutos) **13 de xullo de 2020**

1.– Sexa $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unha forma cuadrática **non dexenerada** en $\mathbb{R}^3$ e F_C a súa matriz asociada na base canónica. Razon a veracidade ou falsedade das seguintes cuestións:

(i) Se todos os elementos da diagonal de F_C son positivos entón w é definida positiva. (0.5 puntos)

(ii) Se algún elemento da diagonal de F_C é nulo entón w é indefinida. (0.5 puntos)

(iii) F_C^2 é a matriz asociada a unha forma cuadrática definida positiva. (0.5 puntos)

(iv) Se $F_C = Id$ entón $f((x_1,x_2,x_3)_B,(y_1,y_2,y_3)_B) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$ pode ser a expresión dunha forma bilineal simétrica asociada a w, nunha base B. (0.5 puntos)

(v) $f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + yx' + yy' + zz'$ pode ser a expresión dunha forma bilineal simétrica asociada a w. (0.5 puntos)

(2.5 puntos)

2.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera o producto escalar usual e a orientación positiva dada pola base canónica:

(i) Dun endomorfismo se coñece a súa matriz asociada na base canónica $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Probar que é unha transformación ortogonal e clasificala describindo xeométricamente como actúa. (1 punto)

(ii) Atopar a matriz asociada a unha simetría respecto ó plano de ecuación $x + y - z = 0$. (1 punto)

(iii) É posible conseguir a simetría anterior compoñendo adecuadamente dous xiros?. Razoa a resposta (0.5 puntos).

(2.5 puntos)

3.– No espazo afín $\mathbb{R}^2$ se consideran os puntos $A = (0,0)$, $B = (8,6)$.

(i) Calcular a ecuación implícita do lugar xeométrico de puntos do plano C que fan que AB sexa a hipotenusa dun triángulo rectángulo ABC. (0.9 puntos)

(ii) Se $P = (4, 14/3)$ é o baricentro dun dos triángulos indicados no apartado anterior atopar a súa área e o seu perímetro. (0.9 puntos)

(iii) Atopar as ecuacións dunha homotecia que leva o punto A en el punto B e o punto B no punto A. (0.7 puntos)

(2.5 puntos)

4.– No plano afín se considera a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de k (0.5 puntos)

(ii) Para $k = 2$ e $k = -1$ atopar o centro, os eixos, as asíntotas e a excentricidade. (1 punto)

(iii) Calcular a ecuación dunha elipse que ten un foco no punto $F(1,0)$, un eixo é a recta $x - y = 0$ e pasa polo punto $(1,1)$. (1 punto)

(2.5 puntos)