Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (2 horas 45 minutos) **2 de junio de 2020**

1.– *Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w(x,y,z) = x^2 + 2kxy - z^2 + 2yz$$

(i) *Clasificar w en función de los valores de k, indicando su rango y signatura.* (0.6 puntos)

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada respecto a la base canónica. Ésta la hallamos trasladando adecuadamente coeficientes.

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-k)} \xrightarrow{\mu_{21}(-k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

Analizamos cuando pueden anularse los valores de la diagonal en función de k, ya que son los puntos límite de cambio de signo:

$$1 - k^2 = 0 \iff k^2 = 1 \iff k = \pm 1.$$

Resumimos en la siguiente tabla la signatura y rango de la matriz y su clasificación:

k	signatura	rango	clasificación
$k < -1$	$(1,2)$	3	no degenerada e indefinida
$k = -1$	$(1,1)$	2	degenerada e indefinida
$-1 < k < 1$	$(2,1)$	3	no degenerada e indefinida
$k = 1$	$(1,1)$	2	degenerada e indefinida
$k > 1$	$(1,2)$	3	no degenerada e indefinida

(ii) *Para $k = 1$ hallar los vectores autoconjugados. Expresar el resultado de la manera más sencilla posible y con respecto a la base canónica.* (1 punto).

Para $k = 1$ la forma cuadrática es indefinida y de rango 2. En ese caso sabemos que los vectores autoconjugados pueden expresarse como unión de dos planos.

Si trabajamos con la matriz asociada diagonalizada que calculamos antes:

$$F_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x',y',z')_B | w((x',y',z')_B) = \} = \left\{ (x',y',z')_B \,\middle|\, (x' \quad y' \quad z')\, F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x',y',z')_B | (x'+y')(x'-y') = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'+y' = 0\} \cup \{(x',y',z')_B | x'-y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,-1,0)_B, (0,0,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,1,0)_B, (0,0,1)_B\} \end{aligned}$$

Para pasar el resultado a la base canónica necesitamos tener la matriz de cambio de base M_{CB}. Para hallarla realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización:

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Hacemos el cambio de base de los generadores de los dos planos:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(1,0,-1), (-1,1,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,0,1)_B, (-1,1,1)_B\}$$

(iii) *Dar un vector que sea autoconjugado para cualquier valor de k.* (0.3 puntos)

Desde luego el vector nulo $(0,0,0)$ siempre es autoconjugado para cualquier forma cuadrática y por tanto para cualquier valor de k.

También dado que la matriz asociada F_C toma el valor 0 en la posición $2,2$ independientemente del vector de k se tiene que:

$$w(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (F_C)_{22} = 0$$

y por tanto $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ es autoconjugado para cualquier valor de k.

(iv) *Calcular k para que los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ sean conjugados.* (0.3 puntos)

Para que sean conjugados tiene que cumplirse que $f((1,0,0),(0,1,0)) = 0$, siendo f la forma bilineal simétrica asociada a w. Dado que tiene la misma matriz asociada que ésta tiene que verificarse:

$$0 = f((1,0,0),(0,1,0)) = (1 \quad 0 \quad 0)\, F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k.$$

(v) *¿Existe algún valor de k para el cuál no existan vectores autoconjugados no nulos?.* (0.3 puntos)

No. Vimos en (iii) que para cualquier valor de k, $w(0,1,0) = 0$ es decir $(0,1,0)$ es un vector no nulo autoconjugado.

(2.5 puntos)

2.– *Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:*

(i) *En $\mathbb{R}^2$ puede definirse un producto escalar tal que $(1,0)$ y $(1,1)$ sean ortogonales.* (0.5 puntos)

VERDADERO. Dado que $B = \{(1,0),(1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ basta definir una producto escalar respecto al cuál esa base sea ortogonal; ello equivale a que la matriz de Gram en tal base sea diagonal. Entonces podemos tomar $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) *Si T es la matriz de una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ y $traza(T) = 1$ entonces T es un giro.* (0.5 puntos)

VERDADERO. En el plano una transformación ortogonal o bien es un giro o bien es una simetría respecto a una recta. Si es una simetría la matriz asociada en una base adecuada es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $traza(T_B) = 1 + (-1) = 0$. La traza se conserva por cambio de base, entonce en ese caso tendría que ocurrir que $traza(T) = traza(T_B) = 0$. Pero nos dicen que $traza(T) = 1$. Por tanto no es una simetría y necesariamente es un giro.

(iii) *Si T es la matriz de un giro en $\mathbb{R}^2$ entonces no tiene autovalores reales.* (0.5 puntos)

FALSO. Por ejemplo si es un giro de cero grados la matriz asociada es la identidad $T = Id$ y el 1 es autovalor.

(iv) *Si consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con las condiciones usuales, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una simetría respecto al plano $x - y = 0$.* (0.5 puntos)

VERDADERO. En $\mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal es:

- Un giro, si el determinante de su matriz asociada es 1.

- Un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, si el determinante de su matriz asociada es -1.

En ester caso $det(T) = -1$, por lo que estamos en el segundo caso. El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = traza(T) \iff \alpha = \pm arcos\left(\frac{1 + traza(T)}{2}\right) = \pm arcos\left(\frac{1+1}{2}\right) = 0$$

Por tanto el giro es de cero grados y en realidad se trata simplemente de la simetría respecto a un plano. El plano de simetría son los autovectores asociados al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

(v) *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t. Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?.* (0.5 puntos)

SI. Basta tener en cuenta que si cambiamos el semieje de giro de sentido cambia el signo del ángulo. Por ejemplo, consideramos la matriz de una transormación:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

el ángulo de giro es:

$$\alpha = \pm arcos\left(\frac{traza(T) - 1}{2}\right) = \pm 90^o$$

El semieje de giro es cualquier autovector asociado al 1. Podemos tomar $(1, 0, 0)$ pero también $(-1, 0, 0)$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ para ver el signo del ángulo tomamos una base:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

siendo $\vec{v}$ un vector cualquiere independiente del semieje. El signo del ángulo es $signo(det(M_{CB})) = signo(1)$. Es por tanto un giro de semieje $(1, 0, 0)$ y ángulo $+90^o$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (-1, 0, 0)$ hacemos lo análogo:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

siendo $\vec{v}$ un vector cualquiere independiente del semieje. El signo del ángulo es $signo(det(M_{CB})) = signo(-1)$. Es por tanto un giro de semieje $(-1, 0, 0)$ y ángulo -90^o.

(2.5 puntos)

3.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera un triángulo isósceles* ABC *con ángulo desigual en el vértices* C. *Se sabe que está contenido en el plano de ecuación* $x + y + z = 1$, $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, -1, 2)$ *y tiene un área de* $4\sqrt{3}$.

(i) *Calcular las coordenadas del vértice* C. (1 punto)

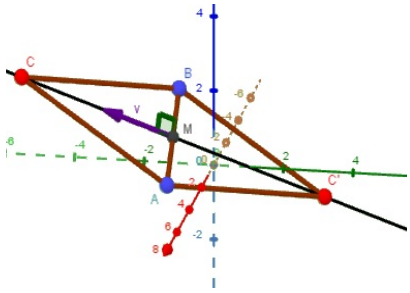
Dado que el triángulo es isósceles con ángulo desigual en C, éste pertence a la mediatriz r del lado AB. Ésta es la recta que pasa por el punto medio M de A y B, es perpendicular a $\vec{AB}$ y está contenida en el plano dado.

Además $h = \|\vec{MC}\|$ cumple:

$$4\sqrt{3} = \text{área} = \frac{\|\vec{AB}\| \cdot h}{2} = \frac{\|(2, 0, 2)\| \cdot h}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{6}.$$

Por tanto si $\vec{v}$ es el vector director de la mediatriz r, el punto C puede obtenerse sumando a M un vector en la dirección de $\vec{v}$ y el mismo sentido o el opuesto y módulo h:

$$C = M + h\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ ó } C = M - h\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$



Vamos con los cálculos. El punto medio M es:

$$M = \frac{A + B}{2} = \frac{(2, -1, 0) + (0, -1, 2)}{2} = (1, -1, 1)$$

El vector $\vec{v}$ director de la mediatriz es un vector (a, b, c) cumpliendo:

i) Es perpendicular a $\vec{AB} = B - A = (-2, 0, 2)$:

$$(a, b, c) \cdot (-2, 0, 2) = 0 \quad \iff \quad -2a + 2c = 0 \quad \iff \quad a - c = 0$$

ii) Está en el plano $x + y + z = 1$. Es perpendicular a su vector normal $(1, 1, 1)$:

$$(a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \iff \quad a + b + c = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene $a = c$, $b = -2a$. Tomando $a = 1$ podemos escoger $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

Entonces una posible solución para C es:

$$C = M + h\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (1, -1, 1) + 2\sqrt{6}\frac{(1, -2, 1)}{\|(1, -2, 1)\|} = (3, -5, 3)$$

Otra sería:

$$C = M - h\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (1, -1, 1) - 2\sqrt{6}\frac{(1, -2, 1)}{\|(1, -2, 1)\|} = (-1, 3, -1)$$

(ii) *Calcular el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo ABC y vértice el origen.* (0.5 puntos)

El volumen es el área de la base (que es un dato dado) por la altura H de la pirámide entre tres. La altura es la distancia del vértice $(0, 0, 0)$ al plano que contiene a la base, es decir, al plano $x + y + z - 1 = 0$. Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$H = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$Vol = \frac{base \cdot H}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{4}{3}.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que transforme el punto A en el punto B y deje C fijo.* (1 punto)

La recta de simetría tiene que ser precisamente la mediatriz del segmento A y B que pasa por C. Vimos en el apartado (i) que es la recta que pasa por $M = (1, -1, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

Entonces las ecuaciones de la simetría son $f(P) = M + t(P - M)$ donde t es la simetría respecto a la recta vectorial generadara por $\vec{v}$ y M es un punto fijo de la transformación; matricialmente:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + T_C\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

siendo T_C la matriz de la simetría respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, -2, 1)\}$.

Calculamos dicha matriz. Construimos una base B con el vector que generea la recta de simetría y otros dos perpendiculares a el; es decir dos vectores indendientes cumpliendo:

$$(x, y, z) \cdot (1, -2, 1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 2y + z = 0.$$

Por ejemplo:

$$B = \{(1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base:

$$T_C = M_{CB}T_B M_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$T_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Y la ecuación de la simetría resulta:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

4.– *En el plano afín se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.* (0.6 puntos)

Para clasificar la cónica calculamos los determinantes de su matriz asociada y matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde: $det(A) = -4$ y $det(T) = 0$. Se trata entonces de una parábola.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda x'^2 - 2dy' = 0$$

con λ el autovalor no nulo de T y $d = +\sqrt{\dfrac{-|A|}{\lambda}}$.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

resultan $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$.

Entonces $d = +\sqrt{\dfrac{-|A|}{\lambda}} = +\sqrt{\dfrac{4}{2}} = \sqrt{2}$. La ecuación reducida es:

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0.$$

En forma canónica:

$$x'^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

de tal manera que el parámetro p de la parábola es $p = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) *Hallar su excentricidad, asínotas, y la distancia entre un foco y el vértice más cercano a él.* (0.4 puntos)

Por ser una parábola la excentricidad es 1 y no tiene asíntotas. La distancia entre su único foco y su único vértice es $\dfrac{p}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) *Calcular las tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(-1, 2)$. (0.5 puntos)

Los puntos de tangencia de las rectas buscadas son la intersección de la recta polar de $(-1, 2)$ respecto de la cónica. Tal recta polar es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y + 1 = 0 \iff x - y - 1 = 0.$$

Intersecamos con la cónica resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación $y = x - 1$ y sustituyendo en la segunda:

$$x^2 + 2x(x-1) + (x-1)^2 - 4x - 1 = 0 \iff 4x^2 - 8x = 0$$

De donde:

$x = 0, \quad y = x - 1 = -1$ y obtenemos el punto $R = (0, -1)$.

$x = 2, \quad y = x - 1 = 1$ y obtenemos el punto $S = (2, 1)$.

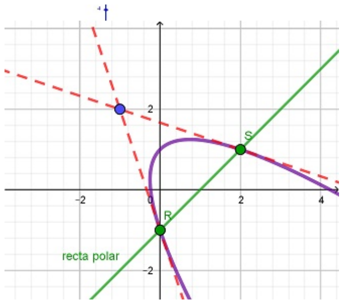
Las correspondientes tangentes son:

- En el punto $R = (0, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -3x - y - 1 \iff 3x - 3y + 1 = 0.$$

- En el punto $S = (2, 1)$:

$$(2 \quad 1 \quad 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 3y - 5 = 0.$$



(iv) *Calcular la ecuación de una cónica que tiene las mismas tangentes que la curva dada en los puntos* $(0, -1)$ *y* $(2, 1)$ *y pasa por el origen.* (1 punto)

Consideramos el haz de cónicas que tiene las mismas tangentes que la curva dada en los puntos $(0, -1)$ y $(2, 1)$ que son precisamente los puntos de tangencia del apartado anterior.

Para generarlo necesitamos dos cónicas que cumplan esa condición. Una puede ser la propia cónica dada y la otra la recta doble que los une, es decir, la recta polar ya calculada al cuadrado.

El haz queda:

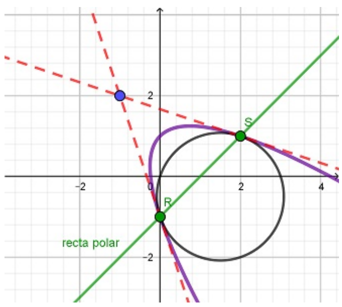
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 + \lambda(x - y - 1)^2 = 0$$

Imponemos que la cónica buscada pasa por el origen $(0, 0)$:

$$0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 + \lambda(0 - 0 - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1.$$

La curva pedida queda:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 + (x - y - 1)^2 = 0 \iff 2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 3x + y = 0.$$



(2.5 puntos)