Álgebra Lineal II **Solución al Examen Parcial**

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **18 de febrero de 2019**

1.– *Dada la forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz$*:*

(i) *Clasificarla indicando su rango y signatura.*

Para clasificarla y hallar rango y signatura diagonalizamos por congruencia su matriz asociada resepcto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 2 y la signatura $(2, 0)$. Se trata por tanto de una forma cuadrática degenerada y semidefinida positiva.

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Una base B es de vectores conjugados si y sólo si la matriz asociada F_B en esa base es diagonal.

En el apartado anterior ya hemos diagonalizado por congruencia la matriz asociada F_C. Esto significa que en una cierta base B la matriz asociada F_B es la forma diagonal obtenida. Para hallar la base B realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna realizadas en el proceso anterior; se obtiene la matriz de paso por columnas de la congruencia que es precisamente la matriz de cambio de base M_{CB}. Sus columnas serán las coordenadas de los vectores de la base B buscada con respecto a la base canónica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}.$$

Por tanto:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, -1, 1)\}.$$

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).*

Dado que la forma cuadrátrica es semidefinida positiva sabemos que los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$autoconj(w) = ker(w) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donde:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Deducimos que:

$$autoconj(w) = ker(w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0,\ y + z = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 1, -1)\}.$$

(iv) *Hallar la matriz asociada a* w *en la base* $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

Simplemente se trata de aplicar la fórmula de cambio de base. Si llamamos:

$$B' = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$

Entonces:

$$F'_B = (M_{CB'})^t F_C M_{CB'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(6 puntos)

2.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si F_C es la matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva entonces $traza(F_C) > 0$.*

VERDADERO. Dada la base $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ los términos de la diagona de F_C son:

$$(F_C)_{ii} = f(e_i, e_i) = w(e_i)$$

Como cada $e_i \neq 0$ y la forma es definida positiva entonces $w(e_i) > 0$ y así:

$$traza(F_C) = \sum_{i=1}^{n} (F_C)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} w(e_i) > 0.$$

(ii) *La suma de dos formas cuadráticas indefinidas es indefinida.*

FALSO. Por ejemplo si tenemos dos formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ de matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces ambas tiene signatura $(1,1)$ y son indefinidas. Sin embargo la matriz asociada a la forma cuadrátrica suma es:

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene signatura $(2,0)$ y es entonces definida positiva (no indefinida).

(iii) *Si F_C es la matriz asociada a una forma cuadrática w en $\mathbb{R}^2$ y algún elemento de la diagonal es nulo, entonces w es semidefinida.*

FALSO. Por ejemplo si tomamos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los dos elementos de su diagonal son nulos. Sin embargo su determinante es $|F_C| = 1 > 0$, y por tanto no puede ser semidefinida, ya que cualquier forma cuadrática semidefinida tiene una matriz asociada con determinante cero.

En particular diagonalizando por congruencia podemos ver que es indefinida:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)\mu_{12}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/2)\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(4 puntos)
