Álgebra Lineal II **Soluciones al Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **10 de junio de 2019**

1.– *De una forma bilineal simétrica* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *se sabe que:*

- *ker*$(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.

- *Los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(1,1,1)$ *son conjugados respecto de* f.

- *Si* w *es la forma cuadrátrica asociada a* f, $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$.

Se pide:

(i) *Hallar la matriz asociada a* F *respecto de la base canónica.*

Comenzamos trabajando en una base sobre la cual tenemos información y por tanto respecto a ella será más fácil obtener la matriz pedida:

$$B = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,0,0), u_3 = (1,1,1)\}$$

Es base de $\mathbb{R}^3$ porque son tres vectores en un espacio de dimensión 3 y además indpendientes porque vemos que la matriz de coordenadas tiene rango 3:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Dado que $u_1 = (1,0,1) \in ker(f)$ entonces $f(u_1, v) = 0$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$.

Como $u_2 = (1,0,0)$ y $u_3 = (1,1,1)$ son conjugados entonces $f(u_2, u_3) = 0$.

Por último si $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$ entonces por definición de forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica $f((1,0,0),(1,0,0)) = f((1,1,1),(1,1,1) = 2$.

Como la matriz asociada F_B cumple por definición que $(F_B)_{ij} = f(u_i, u_j)$ y es simétrica (por ser f simétrica) deducimos que:

$$F_B = \begin{pmatrix} f(u_1,u_1) & f(u_1,u_2) & f(u_1,u_3) \\ f(u_2,u_1) & f(u_2,u_2) & f(u_2,u_3) \\ f(u_3,u_1) & f(u_3,u_2) & f(u_3,u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$F_C = (M_{BC})^t F_B M_{BC}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la forma cuadrática w indicando además su rango y signatura.*

Ya tenemos diagonalizada la forma cuadrática respecto de la base B:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que tiene rango 2 y es por tanto degenerada y signatura $(2,0)$ y es semidefinida positiva.

(iii) *Dar una base de vectores conjugados respecto de w.*

Una base de vectores conjugados es una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal. Hemos visto que F_B es diagonal y así una base que cumple lo pedido es precisamente la base B:

$$B = \{(1,0,1), (1,0,0), (1,1,1)\}.$$

(iv) *Calcular los vectores autoconjugados.*

Dado que la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores conjugados coinciden con el núcleo; pero éste no es dado en el enunciado:

$$autoconj(w) = ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}.$$

(1.2 puntos)

2.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

Formaremos una base B con los vectores del plano V sobre el cuál proyectamos y su recta ortogonal $V^\perp$, porque en esa base la matriz asociada a la proyección es inmediata y sencilla:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos:

$$V^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(1,0,0) = 0, \qquad (x,y,z)\cdot(0,1,0) = 0\}$$

donde:

$$(x,y,z)\cdot(1,0,0) = 0 \iff (\, x \quad y \quad z\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y = 0$$

$$(x,y,z)\cdot(0,1,0) = 0 \iff (\, x \quad y \quad z\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y + z = 0$$

Por tanto:

$$V^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0, \quad x + 2y + z = 0\} = \mathcal{L}\{(1,-1,1)\}$$

Entonces la base B queda:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}$$

Terminamos cambiando a la base caónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{BC}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

3.– *Sea* $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *la matriz asociada respecto de la base canónica a una aplicación lineal t en el espacio euclideo* $\mathbb{R}^3$.

(i) *Demostrar que T es una transformación ortogonal.*

Dado que trabajamos respecto a la base canónica que es una base ortonormal, la transformación es ortogonal si su matriz asociada cumple:

$$T_C^t T_C = Id.$$

Vemos que es así:

$$T_C^t T_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Clasificar y describir geométricamente la transformación t.*

Para clasificar comenzamos calculando el determinante de la matriz asociada. $det(T) = -1$. Se trata por tanto de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

y podemos tomar por tanto $u_1 = (1,-1,1)$.

El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = traza(T) \iff \alpha = \pm arcos\left(\frac{traza(T)+1}{2}\right) = \pm arcos(1/2) = \pm\pi/3.$$

Para averiguar el signo del ángulo utilizamos que este coincide con la orientación de una base cuyo primer vector sea el semieje de giro, el segundo un vector cualquiera y el tercero el vector transformado:

$$B = \{(1,-1,1),(1,0,0), t(1,0,0) = (0,0,-1)\}$$

y así:

$$signo(\alpha) = signo(det(M_{CB})) = signodet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} < 0$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje generado por $u_1 = (1, -1, 1)$:

$$u_1^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (1, -1, 1) \cdot (x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$$

En definitiva se trata de un giro de ángulo $-\pi/3$ y semieje generado por $(1, -1, 1)$ compuesto con una simetría respecto al plano de ecuación $x - y + z = 0$.

(1 punto)

4.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *La traza de la matriz asociada a una simetría respecto a una recta en el plano es* 0.

VERDADERO. La traza de la matriz de una aplicación no depende de la base respecto de la cual se trabaja, porque la traza se conserva por semejanza. Entonces si es una simetría en el plano respecto a una recta, en una base adecuada (primer vector el eje de simetría y segundo ortogonal a él) la matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto su traza (respecto a cualquier base) es $1 + (-1) = 0$.

(ii) *Si la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano tiene traza* 0 *entonces es una simetría respecto a una recta.*

FALSO. Por ejemplo si consideramos una matriz de giro de ángulo $\pi/2$:

$$\begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene traza 0 y obviamente NO es una simetría respecto a una recta.

(iii) *Una simetría en el espacio respecto a una recta es una transformación inversa.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta en el espacio corresponde a un giro de ángulo π. Una matriz de giro tiene determinante positivo y por tanto se trata de una trasnformación directa.

(iv) *En el espacio, la composición de una simetría respecto a un punto y una simetría respecto a un plano siempre es un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una simetría respecto a punto respecto de cualquier base es $-Id$, tiene determinante -1. La matriz asociada a la simetría respecto a un plano tiene determinante -1 también. Por tanto su composición esta representada por una matriz producto de esas dos y entonces con determinante $(-1)(-1) = 1$: se trata de un giro.

(1 punto)

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se consideran el plano* π *y la recta* r *de ecuaciones:*

$$\pi : x + z - 1 = 0, \qquad r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) *Demostrar que* π *y* r *son paralelos.*

El vector normal del plano es π es $\vec{n}_\pi = (1, 0, 1)$.

Pasamos la recta r a paramétricas para hallar un punto de la misma y su vector director. Para ello resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$x = 3 - y, \qquad z = y.$$

Queda:

$$(x, y, z) = (3 - \lambda, \lambda, \lambda) = (3, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1).$$

Vemos que $(3, 0, 0)$ no satisface la ecuación de π y así recta y plano no son coincidentes; además el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta:

$$(1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 1) = -1 + 1 = 0$$

y deducimos entonces que recta y plano son paralelos.

(ii) *Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y que equidiste de la recta y del plano dados.*

Calcularemos una recta que pase por un punto A de la recta dada y corte perpendicularmente al plano en un punto A'. El plano buscado será el paralelo al inicial y que pase por el punto medio de A y A'.

Tomamos $A = (3, 0, 0)$. La recta que pasa por A y es perpendicular al plano tiene por ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + \mu(1, 0, 1) = (3 + \mu, 0, \mu).$$

Sustituimos en la ecuación del plano π para intersecar:

$$3 + \mu + \mu - 1 = 0 \iff \mu = -1$$

De donde $A' = (3 - 1, 0, -1) = (2, 0, -1)$.

El punto medio entre A y A' es $M = (A + A')/2 = (5/2, 0, -1/2)$.

Un plano paralelo a $\pi : x + z - 1 = 0$ tiene su mismo vector normal y entonces es de la forma $x + z + c = 0$. Imponemos que pase por el punto M:

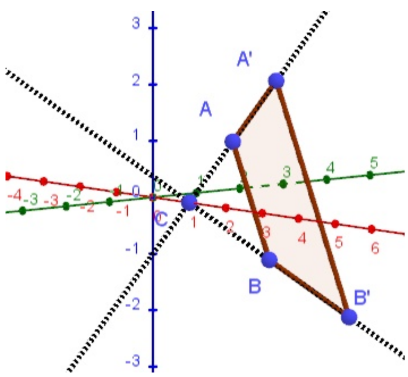
$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + c = 0$$

de donde $c = -2$. El plano buscado es $x + z - 2 = 0$.

(1 punto)

6.– *En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, -1)$, $A' = (1, 2, 2)$ y $B' = (3, 2, -2)$.*

(i) *Dar la ecuación de una homotecia que lleve los puntos A y B respectivamente en A' y B'.*



La homotecia pedida debe de tranformar el vector $\vec{AB}$ en el vector $\vec{A'B'}$. En particular si k es la razón de la homotecia se tiene que cumplir que:

$$k\vec{AB} = \vec{A'B'}.$$

Pero $\vec{AB} = B - A = (1, 0, -2)$ y $\vec{A'}B' = B' - A' = (2, 0, -4)$ de donde $k = 2$.

Ahora la homotecia es de la forma:

$$t(X) = C + k(X - C)$$

siendo C el centro de la misma. Por tanto:

$$A' = t(A) = C + k(A - C) \iff C = \frac{1}{1-k}(A' - kA) = -(A' - 2A) = 2A - A' = (1, 0, 0).$$

Por tanto la ecuación de la homotecia es:

$$t(x, y, z) = (1, 0, 0) + 2((x, y, z) - (1, 0, 0)) \iff t(x, y, z) = (2x - 1, 2y, 2z)$$

(ii) *Demostrar que los cuatro puntos A, B, A', B' son coplanarios.*

Método I: Por ser una homotecia la recta que une un punto y su transformado pasa por el centro de la misma. Por tanto las rectas AA' y BB' pasan por un punto, y así son rectas coplanarias.

Método II: Los cuatro puntos son coplanarios si los vectores que unen tres de ellos al cuarto son coplanarios, es decir, dependientes. Pero:

$$\vec{AB} = B - A = (1, 0, -2), \qquad \vec{AA'} = A' - A = (0, 1, 1), \qquad \vec{AB'} = (2, 1, -3)$$

Los vectores son coplanarios si la matriz de coordenadas tiene rango 2:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

.

(iii) *Hallar el área del cuadrilátero que tiene por vértices los cuatro puntos dados.*

El área del cuadrilátero pedido es el área del triángulo $CA'B'$ menos el del triángulo CAB. Dado que el primero surge del segundo al aplicar una homotecia de razón $k = 2$, la relación entre sus áreas es:

$$\text{área}(CA'B') = k^2 \cdot \text{ área}(CAB) = 4 \text{ área}(CAB)$$

Por tanto:

$$\text{área cuadrilátero} = \text{ área}(CA'B') - \text{ área}(CAB) = 3 \text{ área}(CAB) = 3 \cdot \frac{1}{2}\|\vec{C}A \times \vec{C}B\|$$

donde

$$\vec{C}A \times \vec{C}B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2e_1 - e_2 - e_3 = (-2, -1, -1)$$

y:

$$\text{área cuadrilátero} = 3 \cdot \frac{1}{2}\|\vec{C}A \times \vec{C}B\| = \frac{3}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

(1.3 puntos)

7.– *En el plano afín se considera una familia de cónicas que depende de un parámetro p:*

$$x^2 - 2pxy + y^2 + 4px - 4 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función del parámetro p.*

Clasificamos la cónica en función de lo signos del determinante de la matriz asociada y de la matriz de términos cuadráticos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -p & 2p \\ -p & 1 & 0 \\ 2p & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -p & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos:

$$det(A) = -4 - 4p^2 + 4p^2 = -4, \qquad det(T) = 1 - p^2$$

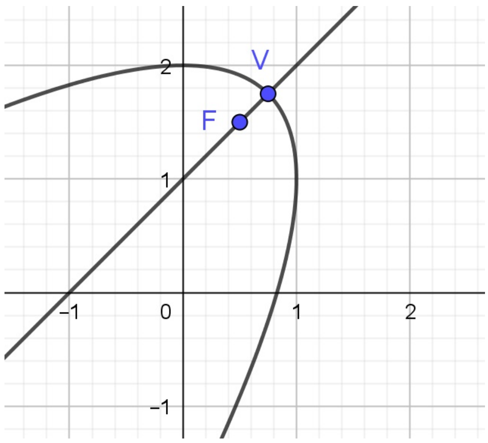
Para distinguir casos vemos donde se anulan. Es claro que $det(A)$ no se anula nunca y $det(T) = 0$ cuando $p^2 = 1$ es decir $p = 1$ ó $p = -1$. Obtenemos:

	$det(A)$	$det(T)$	tipo
$p < -1$	$-$	$-$	hipérbola
$p = -1$	$-$	0	parábola
$-1 < p < 1$	$-$	$+$	elipse real
$p = 1$	$-$	0	parábola
$p > 1$	$-$	$-$	hipérbola

(ii) *Para $p = 1$ hallar:*

Las matrices asociadas con $p = 1$ quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



(ii.a) *El centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad.*

Para $p = 1$ hemos visto que es una parábola. Por tanto sabemos directamente que no tiene ni centro, ni asíntotas y la excentricidad es $e = 1$.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico.

$$det(T - Id) = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda(2-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 2 \text{ ó } \lambda_2 = 0.$$

Los autovectores asociados al 2 cumplen:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x + y = 0$$

Tomamos entonces como autovector asociado al 2 un vector que cumpla la ecuación anterior: $u_1 = (1, -1)$.

El eje es su recta polar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 2 = 0 \iff x - y + 1 = 0.$$

(ii.b) *La ecuación reducida, las ecuaciones de cambio de referencia y el foco.*

Para una parábola la ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 - 2dy'' = 0$$

donde λ_1 es el autovalor de T asociado al autovalor no nulo y $d = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}}$. En nuestro caso queda:

$$d = \sqrt{\frac{-|A|}{-\lambda_1}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

La ecuación reducida resulta:

$$2x''^2 - 2\sqrt{2}y'' = 0$$

que podemos simplificar y reescribir como:

$$x''^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y''$$

siendo $p' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ el parámetro de la parábola.

Las ecucaciones de cambio de referencia son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde P la matriz de autovectores de T normalizados y (a, b) el vértice.

El autovector u_2 asociado al cero ha de escogerse de forma que (*):

$$(a_{13}, a_{23}) \cdot u_2 < 0$$

Los autovectores asociados al cero cumplen :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x - y = 0$$

Escogemos en principio $u_2 = (1, 1)$ verificando esa ecuación. Comprobamos la condición (*):

$$(2, 0) \cdot (1, 1) > 0$$

Vemos que no se cumple y así cambiamos de signo al autovector tomando $u_2 = (-1, -1)$.

Normalizamos los autovectores:

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \qquad \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1,-1)}{\|(-1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1).$$

El vértice es la intersección del eje y de la cónica:

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4 \\ 0 = x - y + 1 \end{cases}$$

De la segunda $y = x + 1$ y sustituyendo en la primera:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 + 4x - 4 = 0 \\ & x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 + 2x + 1 + 4x - 4 = 0 \\ & 4x = 3 \\ & x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

y de ahí $y = x + 1 = \dfrac{7}{4}$. El vértice queda $V = (3/4, 7/4)$.

La ecuación de cambio de referencia queda:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El foco en la nueva referencia es el punto $F = (0, p/2) = (0, \sqrt{2}/4)$. Lo pasamos a la referencia de partida:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

(1.5 puntos)

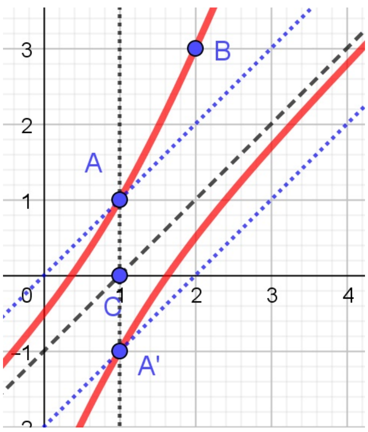
8.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto* $(1,0)$*, tiene una asíntota paralela a la recta* $x = y$ *y pasa por los puntos* $(1,1)$ *y* $(2,3)$*.*

Seguiremos la siguiente idea:

1- Las asínotas pasan por el centro, por tanto podemos hallar la recta paralela a la dada y pasando por el centro: será una de las asíntotas de la cónica.

2- El simétrico del punto $(1,1)$ respecto del centro también pertenece a la cónica.

3- Con lo anterior podemos construir el haz de cónicas conocida una asíntota y dos puntos.



4- Finalmente imponemos que la cónica buscada pase por el punto $(2,3)$ para conlcuir.

1- Una recta paralela a $x=y$ es de la forma $x-y+c=0$. Imponemos que paser por el centro $(1,0)$:

$$1-0+c=0 \Rightarrow c=-1$$

La asíntota es $x-y-1=0$.

2- El simétrico del punto $A=(1,1)$ respecto del centro $C=(1,0)$ es un punto A' cumpliendo:

$$\frac{A+A'}{2}=C \Rightarrow A'=2C-A=(2,0)-(1,1)=(1,-1).$$

3- El haz conocida una asíntota y dos puntos está generado por el producto de la asíntota con la recta que une los puntos dados y el producto de las paralelas a las asíntota que pasan por los puntos dados.

La recta AA' siendo $A=(1,1)$ y $A'=(1,-1)$ es la recta $x=1$ es decir $x-1=0$.

La recta paralela a la asíntota y que pasa por $A=(1,1)$ es de la forma $x-y+d=0$. Imponiendo que pase por A queda $d=0$ y la recta es $x-y=0$.

La recta paralela a la asíntota y que pasa por $A'=(1,-1)$ es de la forma $x-y+g=0$. Imponiendo que pase por A' queda $g-2$ y la recta es $x-y-2=0$.

Por tanto el haz queda:

$$\lambda(x-y-1)(x-1)+(x-y)(x-y-2)=0$$

4. Imponemos que el punto $(2,3)$ pertenezca a la cónica del haz:

$$\lambda(2-3-1)(2-1)+(2-3)(2-3-2)=0 \iff -2\lambda+3=0 \iff \lambda=3/2$$

La cónica queda:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}(x-y-1)(x-1)+(x-y)(x-y-2)=0\\
&3(x^2-xy-x-x+y+1)+2(x^2-2xy+y^2-2x+2y)=0\\
&3x^2-3xy-6x+3y+3+2x^2-4xy+2y^2-4x+4y=0\\
&5x^2-7xy+2y^2-10x+7y+3=0
\end{aligned}$$

(1.4 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2-2xy-y^2-8yz-7z^2+2x-6y-6z+1=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

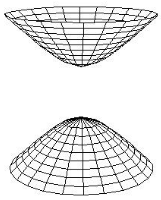
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -4 & -3\\ 0 & -4 & -7 & -3\\ 1 & -3 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, multiplicada por un número o cambiada de posición:

$$A \xrightarrow{H_{21}(1)}\xrightarrow{H_{41}(-1)}\xrightarrow{\mu_{21}(1)}\xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -2\\ 0 & -4 & -7 & -3\\ 0 & -2 & -3 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)}\xrightarrow{H_{42}(-1)}\xrightarrow{\mu_{32}(-2)}\xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{41}(-1)}\xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de dos hojas.



(0.6 puntos)