Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **10 de junio de 2019**

1.– De una forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que:

- $ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.
- Los vectores $(1,0,0)$ y $(1,1,1)$ son conjugados respecto de f.
- Si w es la forma cuadrátrica asociada a f, $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$.

Se pide:

(i) Hallar la matriz asociada a F respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática w indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar una base de vectores conjugados respecto de w.

(iv) Calcular los vectores autoconjugados.

(1.2 puntos)

2.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

(1 punto)

3.– Sea $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz asociada respecto de la base canónica a una aplicación lineal t en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$.

(i) Demostrar que T es una transformación ortogonal.

(ii) Clasificar y describir geométricamente la transformación t.

(1 punto)

4.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) La traza de la matriz asociada a una simetría respecto a una recta en el plano es 0.

(ii) Si la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano tiene traza 0 entonces es una simetría respecto a una recta.

(iii) Una simetría en el espacio respecto a una recta es una transformación inversa.

(iv) En el espacio, la composición de una simetría respecto a un punto y una simetría respecto a un plano siempre es un giro.

(1 punto)

5.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi : x + z - 1 = 0, \qquad r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Demostrar que π y r son paralelos.

(ii) Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y que equidiste de la recta y del plano dados.

(1 punto)

6.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, -1)$, $A' = (1, 2, 2)$ y $B' = (3, 2, -2)$.

(i) Dar la ecuación de una homotecia que lleve los puntos A y B respectivamente en A' y B'.

(ii) Demostrar que los cuatro puntos A, B, A', B' son coplanarios.

(iii) Hallar el área del cuadrilátero que tiene por vértices los cuatro puntos dados.

(1.3 puntos)

7.– En el plano afín se considera una familia de cónicas que depende de un parámetro p:

$$x^2 - 2pxy + y^2 + 4px - 4 = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función del parámetro p.

(ii) Para $p = 1$ hallar:

(ii.a) El centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad.

(ii.b) La ecuación reducida, las ecuaciones de cambio de referencia y el foco.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 0)$, tiene una asíntota paralela a la recta $x = y$ y pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 2xy - y^2 - 8yz - 7z^2 + 2x - 6y - 6z + 1 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **10 de xuño 2019**

1.– Dunha forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que:

- $ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.

- Os vectores $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$ son conxugados respecto de f.

- Se w é a forma cuadrátrica asociada a f, $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$.

Se pide:

(i) Atopar a matriz asociada a F respecto da base canónica.

(ii) Clasificar a forma cuadrática w indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Dar unha base de vectores conxugados respecto de w.

(iv) Calcular os vectores autoconxugados.

(1.2 puntos)

2.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar de matriz de Gram respecto da base canónica:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular a matriz asociada respecto da base canónica da aplicación proxección ortogonal sobre o subespazo vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

(1 punto)

3.– Sexa $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz asociada respecto da base canónica dunha aplicación lineal t no espazo euclideo $\mathbb{R}^3$.

(i) Demostrar que T é unha transformación ortogonal.

(ii) Clasificar e describir xeométricamente a transformación t.

(1 punto)

4.– Razoar a veracidade ou falsedade das seguietes afirmacions.

(i) A traza da matriz asociada a unha simetría respecto a unha recta no plano é 0.

(ii) Se a matriz asociada a unha transformación ortogonal no plano ten traza 0 entón é unha simetría respecto a unha recta.

(iii) Unha simetría no espazo respecto a unha recta é unha transformación inversa.

(iv) No espazo, a composición dunha simetría respecto a un punto e unha simetría respecto a un plano sempre é un xiro.

(1 punto)

5.– No espazo afín $\mathbb{R}^3$ se consideran o plano π e a recta r de ecuacións:

$$\pi : x + z - 1 = 0, \qquad r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Demostrar que π e r son paralelos.

(ii) Atopar a ecuación dun plano paralelo a π e que equidiste da recta e do plano dados.

(1 punto)

6.– No espazo afín $\mathbb{R}^3$ se consideran os puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, -1)$, $A' = (1, 2, 2)$ e $B' = (3, 2, -2)$.

(i) Dar a ecuación dunha homotecia que leve os puntos A e B respectivamente en A' e B'.

(ii) Demostrar que os catro puntos A, B, A', B' son coplanarios.

(iii) Atopar a superficie do cuadrilátero que ten por vértices os catro puntos dados.

(1.3 puntos)

7.– No plano afín se considera unha familia de cónicas que depende dun parámetro p:

$$x^2 - 2pxy + y^2 + 4px - 4 = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función do parámetro p.

(ii) Para $p = 1$ atopar:

(ii.a) O centro, os eixos, as asíntotas e a excentricidade.

(ii.b) A ecuación reducida, as ecuacións de cambio de referencia e o foco.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica sabendo que o seu centro é o punto $(1, 0)$, ten unha asíntota paralela á recta $x = y$ e pasa polos puntos $(1, 1)$ e $(2, 3)$.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 2xy - y^2 - 8yz - 7z^2 + 2x - 6y - 6z + 1 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
