Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **12 de julio de 2019**

1.– *Dado un parámetro p, se considérase una forma cuadática w en $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada en la base canónica:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 4 & p \\ 1 & p & p \end{pmatrix}$$

(i) *Clasificar la forma cuadrática w en función de p indicando además rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos su matriz asociada por congruencia, es decir, realizando las mismas operaciones elementales fila y columna

$$F_C \overset{H_{21}(-p)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-p)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-p^2 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

El tipo de forma cuadrática depende de los signos de la diagonal. Para ver los casos límite de cambio de signo, estudiamos cuando se anulan estos elementos, dependiendo del valor de p:

$$4 - p^2 = 0 \iff p^2 = 4 \iff p = \pm 2$$
$$p - 1 = 0 \iff p = 1$$

Entonces distinguimos los siguientes casos:

parámetro	signatura	rango	tipo
$p < -2$	$(1, 2)$	3	indefinida, no degenerada
$p = -2$	$(1, 1)$	2	indefinida, degenerada
$-2 < p < 1$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada
$p = 1$	$(2, 0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$1 < p < 2$	$(3, 0)$	3	definida positiva, no degenerada
$p = 2$	$(2, 0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$p > 2$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada

(ii) *¿Para qué valores de p la forma cuadrática dada define un producto escalar?.*

La forma cuadrática es un producto escalar si y sólo si es definida positiva, es decir, cuando $1 < p < 2$.

(iii) *Para $p = 1$ hallar los vectores autoconjugados expresando el resultado de la manera más sencilla posible.*

Para $p = 1$ hemos visto que la forma cuadrática es semidefinida positiva. Por tanto los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$(x, y, z) \in ker(w) \iff F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema paramétricamente se obtiene:

$$autoconj(w) = ker(w) = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}.$$

(iv) *Para $p = 2$ hallar una base de vectores conjugados.*

Una base B de vectores conjugados es aquella en la cual la matriz asociada es diagonal. Para calcularla basta realizar sobre la identidad las mismas operaciones columnas realizadas en el proceso de diagonalización, obteniendo de esta forma la matriz M_{CB}:

$$F_C \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

y así:

$$B = \{(1,0,0), (-2,1,0), (-1,0,1)\}.$$

(1.2 puntos)

2.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera la base* $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ *y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base* B *es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{u} = (0,1,1)$ *calcular* $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ *y el ángulo que forman.*

Para poder haces los cálculos primero obtenemos la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|\vec{v}\| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = +\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

Finalmente:

$$ang(\vec{u},\vec{v}) = arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

(1 punto)

3.– *En el espacio euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica dar la matriz* T_C *de un giro de ángulo* $\pi/2$ *y semieje generado por el vector* $(0,1,1)$. *Hallar* T_C^{601}.

Calcularemos primero la matriz de giro en una base auxiliar ortonormal y bien orientada $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, donde el primer vector debe de ser el generador semieje normalizado. Para ello primero nos preocupamos de calcular tres vectores ortogonales $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, siendo $\vec{v}_1 = (0,1,1)$ el generador de semieje.

Buscamos $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{v}_1$, es decir, cumpliendo $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$:

$$(x,y,z) \cdot (0,1,1) = 0 \iff y + z = 0.$$

Tomamos un vector cumpliendo esa ecuación; por ejemplo $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$.

Buscamos $\vec{v}_3$ ortogonal a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es decir cumpliendo la condición anterior y además que $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$:

$$\begin{aligned}(x,y,z) \cdot (0,1,1) = 0 &\iff y + z = 0\\ (x,y,z) \cdot (0,1,-1) = 0 &\iff y - z = 0\end{aligned}$$

Escogemos un vector cumpliendo ambas ecuaciones; por ejemplo $\vec{v}_3 = (1,0,0)$. Hemos obtenido una base ortogonal:

$$B' = \{(0,1,1), (0,1,-1), (1,0,0)\}.$$

Comprobamos su orientación analizando el signo de $det(M_{CB'})$:

$$det(M_{CB'}) = det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = -2 < 0 \iff \text{orientación negativa}$$

Corregimos la orientación cambiando de signo a $\vec{v}_2$. Finalmente normalizamos los vectores:

$$\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{(0,-1,1)}{\|(0,-1,1)\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = (1,0,0).$$

Entonces $B = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0)\right\}$. En esta base sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & cos(\pi/2) & -sin(\pi/2)\\ 0 & sin(\pi/2) & cos(\pi/2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Finalmente la cambiamos de base:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_B M_{CB}^t,$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

y $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$ porque es una matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales. Operando resulta:

$$T_C = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora T_C^{601}. Como T_C es una matriz de giro de 90^o, T_C^4 es una matriz de giro de $4{\cdot}90^o = 360^o$, es decir, $T_C^4 = Id$. Por tanto:

$$T_C^{601} = T_C^{4\cdot 150+1} = (T_C^4)^{150} \cdot T_C = Id^{150} \cdot T_C = T_C.$$

(1 punto)

4.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si T es la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ entonces $traza(T) \geq -1$.*

VERDADERO. Sabemos que la traza de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base porque la traza se conserva por semejanza. Entonces en una base adecuada sabemos que la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$traza(T) = traza(T_B) = 1 + 2cos(\alpha) \leq 1 + 2(-1) = -1.$$

(ii) *La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta en el plano es una transformación inversa; la composición de dos tranformaciones inversas es una directa, es decir, un giro.

De hecho, como contraejemplo trivial basta considerar la composición de una simetría respecto a una recta consigo misma. Es claramente la identidad que NO es una nueva simetría respecto a una recta.

(iii) *Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es* 1.

FALSO. Dos bases tiene la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es positivo, pero NO necesariamente uno. Por ejemplo $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,0),(0,2)\}$ tienen la misma orientación pero $det(M_{CB}) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 1$.

(iv) *Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.*

VERDADERO. Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Tiene un autovector asociado al -1 que es el precisamente el eje de giro. Si tiene un autovector $\vec{v}$ asociado al 1 ha de ser perpendicular al eje de giro (porque en transformaciones ortogonales autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales). Entonces sobre ese vector $\vec{v}$ actúa el giro; pero si esta asociado al 1 cumple que $t(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ y por tanto el giro es de cero grados.

En resumen la transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ es un giro de **ángulo CERO** compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, luego es simplemente una simetría respecto a un plano.

(1 punto)

5.– *En el plano afín euclideo $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $A(-1,3)$ y $B(3,1)$. Hallar la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos P del plano que hacen que el triángulo APB es rectángulo en P. ¿Qué tipo de cónica se obtiene? Calcula su centro.*

Sea $P = (x,y)$. El ángulo P en el triángulo APB es el que forman los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{BP}$. Para que sea rectángulo tienen que ser ortogonales:

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \iff (x+1, y-3) \cdot (x-3, y-1) = 0 \iff (x+1)(x-3) + (y-3)(y-1) = 0$$

Operando queda:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

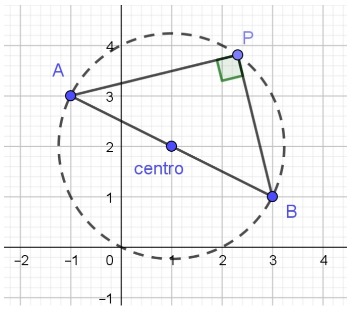
Es una ecuación de grado 2 y por tanto es una cónica. Su matriz asociada y de términos cuadráticos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| < 0$ y $|T| > 0$ se trata de una elipse real (de hecho una circunferencia). Su centro (a, b) se obtiene resolviendo

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h \end{pmatrix} \iff a - 1 = 0, b - 2 = 0$$

de donde $centro = (1, 2)$.



Nota: Puede obtenerse la misma conclusión directamente completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 1 - 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5$$

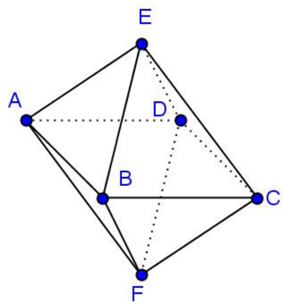
Por tanto la ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

es decir una circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio $\sqrt{5}$. De hecho es la circunferencia que tiene por diámetro el segmento AB.

(0.8 punto)

6.– *En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.*



(i) *Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.*

Observamos que:

$$C = B + \vec{AD} = B + D - A = (1, 0, 1) + (1, 0, -1) - (0, 0, 0) = (2, 0, 0).$$

Ahora los vértices E y F están sobre la recta perpendicular al cuadrado $ABCD$ y que paso por su punto medio M. Se tiene que:

$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{(0, 0, 0) + (2, 0, 0)}{2} = (1, 0, 0).$$

El plano ABC es:

$$det \begin{pmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 1 - 0 \\ 2 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0.$$

El vector normal del plano es $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Entonces los vértices E y F tienen coordenadas de la forma:

$$M + \lambda\vec{n} = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) = (1, \lambda, 0).$$

Finalmente imponemos que $d(A, E) = d(A, F) = d(A, B)$:

$$\sqrt{(1-0)^2 + (\lambda-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} \iff 1 + \lambda^2 = 2 \iff \lambda = \pm 1.$$

Concluimos que:

$$E = (1, 1, 0), \qquad F = (1, -1, 0).$$

(ii) *Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.*

El área es 8 veces la de cualquiera de sus caras triángulares:

$$8\text{área}(ABE) = 8 \cdot \frac{1}{2}\|\vec{A}B \times \vec{A}E\| = 8 \cdot \frac{1}{2}\|(1, 0, 1) \times (1, 1, 0)\| = 4\sqrt{3}.$$

El volumen es dos veces el de la pirámide $ABCDE$:

$$2\text{vol}(ABCDE) = 2 \cdot \frac{1}{3}|[\vec{A}B, \vec{A}C, \vec{A}E]| = \frac{2}{3}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{4}{3}.$$

El radio es la distancia del centro a cualquiera de sus vértices:

$$d(M, A) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 1.$$

(iii) *Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.*

Hallamos los planos que contienen a las caras ABE y ABF. El ángulo pedido es el que forman sus vectores normales.

Plano ABE:

$$det\begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y - z = 0, \quad \vec{n}_1 = (1, -1, -1).$$

Plano ABF:

$$det\begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 1-0 & -1-0 & 0-0 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - z = 0, \quad \vec{n}_2 = (1, 1, -1).$$

El ángulo pedido es:

$$arcos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}\right) = arcos\left(\frac{(1, -1, 1) \cdot (1, 1, -1)}{\|(1, -1, 1)\|\|(1, 1, -1)\|}\right) = arcos\left(\frac{-1}{3}\right).$$

(iv) *Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices D, C, F.*

La proyección se obtiene interescando el plano DCF con la recta perpendicular a él que pasa por E.

El plano DCF es:

$$det\begin{pmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1-2 & 0-0 & -1-0 \\ 1-2 & -1-0 & 0-0 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y - z - 2 = 0, \quad \vec{n} = (1, -1, -1).$$

La recta ortogonal al plano que pasa por E es en paramétricas:

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, -1) = (1 + \lambda, 1 - \lambda, -\lambda)$$

Sustituimos en la ecuación del plano para intersecar:

$$(1 + \lambda) - (1 - \lambda) - (-\lambda) - 2 = 0 \iff 3\lambda - 2 = 0 \iff \lambda = \frac{2}{3}.$$

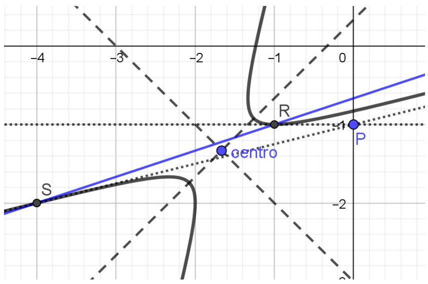
La proyección pedida es:

$$(1, 1, 0) + \frac{2}{3}(1, -1, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

(1.5 puntos)

7.– *En el plano afín se considera la cónicas de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$



(i) *Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.*

Para clasificar la cónica calculamos los determinantes de las matrices asociada y de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $|A| = -1 > 0$ y $|T| = -3 < 0$. Se trata de una hipérbola.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0$$

donde λ_1, λ_2 son los autovalores de T y $d = |A|/|T| = 1/3$.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1 - \lambda)^2 - (-2)^2 = 0 \iff (-1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

Obtenemos $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ (colocamos en primer lugar el autovalor con el mismo signo que $|A|$ para que la forma reducida tenga el eje focal sobre el eje OX'').

Queda:

$$-x''^2 + 3y''^2 + \frac{1}{3} = 0 \iff x''^2 - 3y''^2 = \frac{1}{3}.$$

La reescribimos en la forma usual:

$$3x''^2 - 9y''^2 = 1 \iff \frac{x''^2}{1/3} - \frac{y''^2}{1/9} = 1.$$

(ii) *Hallar el centro, los ejes, la excentricidad y la distancia entre los dos focos.*

De la eucación reducida obtenida antes:

$$\frac{x''^2}{1/3} - \frac{y''^2}{1/9} = 1.$$

tenemos que $a^2 = 1/3$ y $b^2 = 1/9$. Entonces:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4/9} = 2/3.$$

y:

$$excentricidad = \frac{c}{a} = \frac{2/3}{\sqrt{1/3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

La distancia entre focos es $2c = \dfrac{4}{3}$.

El centro es el punto (s, t) verificando:

$$A \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff s - 2t - 1 = 0, \quad -2s + t - 2 = 0.$$

Resolviendo resulta $centro = \left(\dfrac{-5}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

Tomamos un vector cumpliendo la ecuación: $u_1 = (1, 1)$.

Calculamos ahora los autovectores asociados a $\lambda_1 = 3$:

$$(T - 3Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

Tomamos un vector cumpliendo la ecuación: $u_2 = (1, -1)$.

Los ejes quedan:

$$(\,1 \quad 1 \quad 0\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x - y - 3 = 0 \iff x + y + 3 = 0$$

$$(\,1 \quad -1 \quad 0\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x - 3y + 1 = 0$$

(iii) *Hallar las tangentes exteriores a la cónica que pasan por el punto* $(0, -1)$.

Calculamos la recta polar r_P del punto $P = (0, -1)$. Las tangentes son las rectas que unen P con los puntos de corte de la recta polar y la cónica.

La recta polar es:

$$(\,0 \quad -1 \quad 1\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 3y - 2 = 0.$$

Intersecamos con la cónica:

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación $x = 3y + 2$ y sustiyuendo en la segunda:

$$(3y + 2)^2 - 4y(3y + 2) + y^2 - 2(3y + 2) - 4y - 4 = 0.$$

Simplificando:

$$y^2 + 3y + 2 = 0,$$

y resolviendo:

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2 \cdot 4}}{2} = -1 \text{ ó } -2$$

Si $y = -1$ entonces $x = 3y + 2 = 3(-1) + 2 = -1$. Si $y = -2$ entonces $x = 3y + 2 = 3(-2) + 2 = -4$. Los puntos de intersección quedan $R = (-1, -1)$ y $S = (-4, -2)$.

Las tangentes pedidas son:

- La recta PR que une $P = (0, -1)$ y $R = (-1, -1)$ que es $y = -1$.

- La recta PS que une $P = (0, -1)$ y $S = (-4, -2)$:

$$\frac{x - 0}{-4 - 0} = \frac{y + 1}{-2 + 1} \iff x - 4y - 4 = 0.$$

(1.5 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una elipse sabiendo que un foco está en el punto $F(0, 2)$, un eje es la recta $2x - y - 3 = 0$ y pasa por el punto $(4, -1)$.*

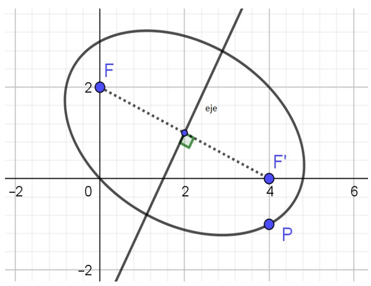
Seguiremos estos pasos:

- Calculamos el segundo foco F' como el simétrico de F respecto al eje dado.

- Usamos la ecuación de la elipse como lugar geométrico de puntos cuya suma de distancia a los focos es constante:

$$d((x, y), F) + d((x, y), F') = k$$

- Hallamos k imponiendo que pase por $(4, -1)$.



El simétrico $F' = (a, b)$ de F respecto al eje $2x - y - 3 = 0$ cumple dos condiciones:

- El punto medio de F y F' pertence al eje. El punto medio es:

$$\frac{F + F'}{2} = (a/2, 1 + b/2)$$

Imponemos que perteneza al eje:

$$a - 1 - b/2 - 3 = 0 \iff 2a - b = 8.$$

- El vector $\vec{F}F'$ es perpendicular al eje o equivalentemente paralelo a su vector normal $(2,-1)$:

$$\frac{a-0}{2} = \frac{b-2}{-1} \iff a + 2b = 4.$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones se obtiene:

$$F' = (a,b) = (4,0).$$

La ecuación del la elipse queda:

$$d((x,y),(0,2)) + d((x,y),(4,0) = k \iff \sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} = k$$

Imponemos que pase por $(4,-1)$:

$$k = \sqrt{4^2+(-1-2)^2} + \sqrt{(4-4)^2+(-1)^2} = 6$$

La ecuación queda:

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 6$$

Operando resulta:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 24x - 24y = 0.$$

(1.4 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 2x + 2y + 6z = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

Su matriz asociada es:

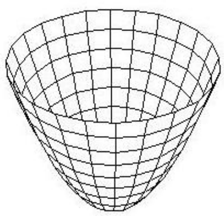
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, multiplicada por un número o cambiada de posición:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-2)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin usar la cuarta fila en las formas contraindicadas. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos que es $(+,+,0)$. Se trata por tanto de un paraboloide elípitico.



(0.6 puntos)