Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **12 de julio de 2019**

1.– Dado un parámetro p, se considérase una forma cuadática w en $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada en la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 4 & p \\ 1 & p & p \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática w en función de p indicando además rango y signatura.

(ii) ¿Para qué valores de p la forma cuadrática dada define un producto escalar?.

(iii) Para $p = 1$ hallar los vectores autoconjugados expresando el resultado de la manera más sencilla posible.

(iv) Para $p = 2$ hallar una base de vectores conjugados.

(1.2 puntos)

2.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{u} = (0,1,1)$ calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ y el ángulo que forman.

(1 punto)

3.– En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica dar la matriz T_C de un giro de ángulo $\pi/2$ y semieje generado por el vector $(0,1,1)$. Hallar T_C^{601}.

(1 punto)

4.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si T es la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ entonces $traza(T) \geq -1$.

(ii) La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.

(iii) Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es 1.

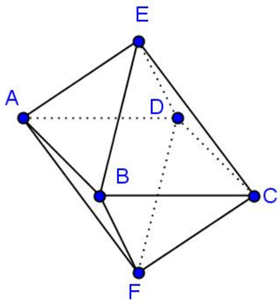
(iv) Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.

(1 punto)

5.– En el plano afín euclideo $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $A(-1,3)$ y $B(3,1)$. Hallar la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos P del plano que hacen que el triángulo APB es rectángulo en P. ¿Qué tipo de cónica se obtiene? Calcula su centro.

(0.8 punto)

6.– En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$.



(i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

(ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.

(iii) Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.

(iv) Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices D, C, F.

(1.5 puntos)

7.– En el plano afín se considera la cónicas de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

(i) Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.

(ii) Hallar el centro, los ejes, la excentricidad y la distancia entre los dos focos.

(iii) Hallar las tangentes exteriores a la cónica que pasan por el punto $(0, -1)$.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una elipse sabiendo que un foco está en el punto $F(0, 2)$, un eje es la recta $2x - y - 3 = 0$ y pasa por el punto $(4, -1)$.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 2x + 2y + 6z = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II		**Exame Final**
Exercicio único	(3 horas.)	**12 de xullo 2019**

1.– Dado un parámetro p, se considera unha forma cuadática w en $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada na base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 4 & p \\ 1 & p & p \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar a forma cuadrática w en función de p indicando ademais rango e signatura.

(ii) Para qué valores de p a forma cuadrática dada define un producto escalar?.

(iii) Para $p = 1$ atopar os vectores autoconxugados expresando el resultado do xeito máis sinselo posible.

(iv) Para $p = 2$ atopar unha base de vectores conxugados.

(1.2 puntos)

2.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera a base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e un producto escalar con matriz de Gram respecto da base B:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados os vectores $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{u} = (0,1,1)$ calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ e o ángulo que forman.

(1 punto)

3.– No espazo euclideo $\mathbb{R}^3$ co producto escalar usual e orientación positiva dada pola base canónica dar a matriz T_C dun xiro de ángulo $\pi/2$ e semieixo xerado polo vector $(0,1,1)$. Atopar T_C^{601}.

(1 punto)

4.– Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións.

(i) Se T é a matriz asociada a un xiro en $\mathbb{R}^3$ entón $traza(T) \geq -1$.

(ii) A composición de dúas simetrías respecto a unha recta no plano é unha nova simetría respecto a unha recta.

(iii) Se dúas bases teñen a mesma orientación entón o determinante da matriz de cambio de base entre elas é 1.

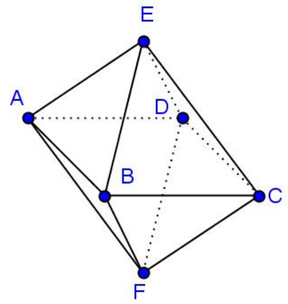
(iv) Se T é unha transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ e 1 é autovalor de T entón a transformación é unha simetría respecto a un plano.

(1 punto)

5.– No plano afín euclideo $\mathbb{R}^2$ se consideran os puntos $A(-1,3)$ e $B(3,1)$. Atopar a ecuación implícita do lugar xeométrico de puntos P do plano que fan que o triángulo APB é rectángulo en P. Qué tipo de cónica se obtén? Calcula o seu centro.

(0.8 punto)

6.– No espazo afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ e $D = (1,0,-1)$.



(i) Atopar as coordenadas de tódolos vértices do octaedro.

(ii) Atopar a súa área, o seu volumen e o radio da esfera circunscrita.

(iii) Calcular o ángulo que forman dúas caras do octaedro.

(iv) Calcular a proxección ortogonal do punto E sobre o plano que contén ós vértices D, C, F.

(1.5 puntos)

7.– No plano afín se considera a cónicas de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

(i) Clasificar a cónica e atopar a súa ecuación reducida.

(ii) Atopar o centro, os eixos, a excentricidade e a distancia entre os dous focos.

(iii) Atopar as tanxentes exteriores á cónica que pasan polo punto $(0,-1)$.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha elipse sabendo que un foco está no punto $F(0,2)$, un eixo é a recta $2x-y-3=0$ e pasa polo punto $(4,-1)$.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 2x + 2y + 6z = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
