

1.— Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$:

(i) Clasificarla indicando su rango y signatura.

Para clasificarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1, 0)$ y el rango es 1. Se trata por tanto de una forma cuadrática degenerada y semidefinida positiva.

(ii) Hallar una base de vectores conjugados.

Es una base B' en la cual la matriz asociada es diagonal. En el apartado anterior ya hemos diagonalizado; por tanto basta aplicar sobre la identidad las mismas operaciones columna que en el proceso anterior obteniendo así la matriz de paso $M_{CB'}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}$$

Por tanto $B' = \{(1, 0), (-2, 1)\}$.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).

Dado que w es semidefinida positiva sabemos que los autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$\begin{aligned} \text{autoconj}(w) = \ker(w) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{F_C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} = \mathcal{L}\{(2, -1)\}. \end{aligned}$$

(iv) Calcular la matriz asociada a w en la base:

$$B = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

Simplemente aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((2, 1), (1, 3))$.

La matriz asociada a f es la misma que la matriz asociada a w . Por tanto:

$$f((2, 1), (1, 3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 28.$$

(7 puntos)

- 2.**— Sea V un espacio vectorial. Si w es una forma cuadrática en V y $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ cumplen $w(\vec{v}_1) \cdot w(\vec{v}_2) < 0$.
¿Qué tipo de forma cuadrática es w ?

Si $w(\vec{v}_1) \cdot w(\vec{v}_2) < 0$ entonces $w(\vec{v}_1)$ y $w(\vec{v}_2)$ tienen distinto signo; es decir hay un vector no nulo cuya imagen es positiva y otro cuya imagen es negativa. Entonces necesariamente la forma cuadrática es indefinida.

(1 punto)

-
- 3.**— Si A es una matriz asociada a una forma cuadrática w en $\mathbb{R}^2$ y $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$:

- (i) ¿Puede ser w definida negativa?

No. Si A es una matriz respecto a una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ se tiene que:

$$a_{11} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1).$$

Si fuese definida negativa tendría que ocurrir que $a_{11} = w(\vec{u}_1) < 0$.

- (ii) ¿Puede ser w semidefinida positiva?

Si. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cumple que $a_{11} = a_{22} = 1 > 0$ pero es semidefinida positiva.

- (iii) ¿Puede ser w indefinida?

Si. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cumple $a_{11} = 1 > 0$, $a_{22} = 3 > 0$ pero es indefinida.

(2 puntos)
