Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **21 de febrero de 2018**

1.– *Dada la forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$:

(i) *Clasificarla indicando su rango y signatura.*

Para claisficarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1,1)$ y el rango es 2. Se trata por tanto de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Es una base B' en la cual la matriz asociada es diagonal. En el apartado anterior ya hemos diagonalizado por tanto basta aplicar sobre la identidad las mismas operaciones columna que en el proceso anterior obteniendo así la matriz de paso $M_{CB'}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}$$

Por tanto $B' = \{(1,0), (-2,1)\}$.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).*

Dado que w es indefinida de rango 2 sabemos que los autoconjugados pueden expresarse como unión de dos rectas. Si trabajamos en la base B' en la cuál diagonaliza:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x',y')_{B'} | w((x',y')_B) = 0\} = \left\{ (x',y')_{B'} \middle| \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x',y')_{B'} | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x',y')_B | x' - y' = 0\} \cup \{(x',y')_{B'} | x' + y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,1)_{B'}\} \cup \mathcal{L}\{(1,-1)_{B'}\} \end{aligned}$$

Por último pasamos los generadores a la base canónica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB'}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB'}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_C,$$

y así:

$$Autoconj(w) = \mathcal{L}\{(-1,1)\} \cup \mathcal{L}\{(3,-1)\}.$$

(iv) *Calcular la matriz asociada a w en la base:*

$$B = \{(1,1), (1,-1)\}$$

Simplemente aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(v) *Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((2,1),(1,3))$.*

La matriz asociada a f es la misma que la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((2,1),(1,3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 25.$$

(7 puntos)

2.– *Sea V un espacio vectorial. Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de vectores conjugados respecto de una forma cuadrática w y además esos mismos vectores son también autoconjugados. ¿Cuál es la matriz asociada a w respecto de la base B?.*

Por ser una base de vectores conjugados la matriz asociada en esa base es diagonal.

Además por definición de matriz asociada:

$$(F_B)_{1,1} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1), \qquad (F_B)_{2,2} = f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) = w(\vec{u}_2)$$

Pero por ser los vectores autoconjugados $w(\vec{u}_1) = w(\vec{u}_2) = 0$ y por tanto F_B es la matriz nula.

(1 punto)

3.– *Si A es una matriz asociada a una forma cuadrática w en $\mathbb{R}^2$ y $a_{11} = 0$:*

(i) *¿Puede ser w definida positiva?.*

No. Si A es una matriz respecto a una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ se tiene que:

$$a_{11} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1).$$

Si fuese definida positiva tendría que ocurrir que $a_{11} = w(\vec{u}_1) > 0$.

(ii) *¿Es necesariamente w semidefinida?.*

No. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{12}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

cumple $a_{11} = 0$ pero es indefinida.

(iii) *¿Puede ser w indefinida?.*

Si. Acabamos de ver un ejemplo en el apartado anterior.

(2 puntos)