| **Álgebra Lineal II** | | **Examen Final** |
|---|---|---|
| **Ejercicio único** | (3 horas) | **30 de mayo de 2018** |

**1.–** *Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como,*

$w(x, y, z) = x^2 + 2axy + 4axz + az^2$.

(i) *Calcular la matriz asociada a $w$ en la base canónica y en la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$.*

La matriz asociada en la base canónica, trasladando adecuadamente los coeficientes de la expresión dada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz en una base $B$ aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = (M_{CB})^t F_C M_{CB}$$

Ahora bien, los vectores dados no forman base ya que su matriz de coordenadas (en columna) tiene rango 2, por tener una fila de ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

así que con esos datos no tendría sentido el cálculo.

(ii) *Clasificar la forma cuadrática en función de los valores de $a$, indicando su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizamos la matriz asociada por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-a)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-2a)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-2a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & a-4a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Los valores de $a$ que delimitan las reginoes con posiblemente distinta signatura son aquellos donde se anula algún término de la forma diagonal, es decir, en este caso para $a = 0$.

Por tanto distinguimos lo siguiente casos:

| $a$ | signatura | rango | clasificación |
|---|---|---|---|
| $< 0$ | $(1, 2)$ | 3 | no degenerada e indefinida |
| $= 0$ | $(1, 0)$ | 3 | degenerada y semidefinida positiva |
| $> 0$ | $(2, 1)$ | 3 | no degenerada e indefinida |

(iii) *Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.*

Que la base $B'$ sea de vectores conjugados equivale a que la matriz asociada en esa base $B'$ sea diagonal. Por tanto $M_{CB'}$ es la matriz de paso por columnas de la congruencia realizada en el apartado anterior. Realizamos para hallarla las mismas operaciones columna que hicimos en ese proceso pero ahora sobre la indentidad:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la base pedida es:

$$B' = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, -2, 1)\}$$

(iv) *Para $a = 0$ calcular el núcleo de $w$ y los vectores autoconjugados.*

Vimos que para $a = 0$ la forma cuadrática es semidefinida positiva. En ese caso núcelo y vectores autoconjugados coinciden.

$$\begin{aligned} autoconj(w) = ker(w) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F_c(x,y,z)^t = (0,0,0)\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}. \end{aligned}$$

(1.2 puntos)

---

**2.–** *En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cumpliendo:*

*- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ son ortogonales.*

*- Los vectores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.*

*- Los tres vectores anteriores son unitarios.*

*(i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.*

Consideramos la base formada por los tres vectores sobre los cuales tenemos información:

$$B = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$$

Forman base porque tenemos tantos vectores como la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ y además son independientes porque la matriz formada por sus coordenads tiene rango 3.

Por definición de matriz de Gram:

$$G_B = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & u_1 \cdot u_3 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & u_2 \cdot u_3 \\ u_3 \cdot u_1 & u_3 \cdot u_2 & u_3 \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

De la ortogonalidad indicada en el primer apartado sabemos que $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = 0$. Del hecho de ser unitarios sabemos que $u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 1$.

Por último usamos el dato del ángulo:

$$u_2 \cdot u_3 = \|u_2\| \|u_3\| cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

De todo esto deducimos que:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente la pasamos a la base canónica:

$$G_C = (M_{BC})^t G_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -1 \\ -5/2 & 4 & 3/2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^{\perp}$ respecto al producto escalar dado.*

En primer lugar calculamos una base de $U$ eliminando los posibles vectores dependientes entre sus generadores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(0,0,1)\}$. Ahora:

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0,\ (x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)G_c(1,1,1)^t = 0,\ (x,y,z)\cdot(0,0,1)^t = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -\frac{3}{2}x + 3y + \frac{3}{2}z = 0,\ -x + \frac{3}{2}y + z = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0,\ x - z = 0\} = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}. \end{aligned}$$

(1 punto)

---

**3.–** *Sea $T$ la matriz asociada a una transformación ortogonal $t$ en el espacio eculideo $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $det(T) < 0$, $t(1,1,2) = (-1,-1,-2)$ y $traza(T) = 1$, clasificar y describir geométricamente la transformación $t$.*

Dado que $det(T) < 0$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Si llamamos $\alpha$ al ángulo de giro se cumple que:

$$traza(T) = -1 + 2cos(\alpha) \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{traza(T)+1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Por tanto el giro es ángulo cero y así es simplemente una simetría respecto a un plano. En tal simetría los únicos vectores cuya imagen es el propio vector cambiado de signo son los perpendicualres al plano. Como sabemos que $t(1,1,2) = -(1,1,2)$ se deduce que el plano de simetría es perpendicular al vector $(1,1,2)$.

En resume se trata de una simetría respecto al plano de ecuación $x + y + 2z = 0$.

(1 punto)

---

**4.–** *Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, obtener una matriz $P$ verificando que $P^tAP = P^{-1}AP$ sea diagonal.*

Nos piden una matriz $P$ que permita diagonalizar simultáneamente $A$ por congruencia y semejanza, de forma que se cumpla que $P$ es ortogonal es decir $P^{-1} = P^t$.

Por ser $A$ una matriz real simétrica sabemos que esto siempre puede conseguirse. Basta tomar $P$ con columnas una base ortonormal de autovectores de $A$.

Calculamos los autovalores de $A$ y primero el polinomio característico:

$$|A - \lambda Id| = (1 - \lambda^2) - 2^2 = (3 - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Por tanto hay dos autovalores $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.

Calculamos los correspondientes autovectores:

- Asociados a $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + 2y = 0,\ 2x - 2y = 0 \iff x - y = 0$$

Por tanto $S_3 = \mathcal{L}\{(1,1)\}$.

- Asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(A + 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0,\ 2x + 2y = 0 \iff x + y = 0$$

Por tanto $S_3 = \mathcal{L}\{(1, -1)\}$.

Directamente sabemos también que por ser $A$ simétrica, autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales. Entonces $\{(1, 1), (1, -1)\}$ es una base ortogonal de autovectores y sólo falta normalizarlos.

$$\frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \qquad \frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

Finalmente la matriz $P$ pedida la forman los dos autovectores normalizados colocados en columa:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

---

**5.–** *En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Calcular la distancia entre el punto $(-4, 1, 0)$ y la recta $r$ de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Aunque sabemos que hay una fórmula directa para hallar la distancia de un punto a un plano en el espacio, no es aconsejable usarla porque utiliza el prodcuto vectorial y el método de cáclulo habitual de mismo no es válido bajo productos escalares distintos del usual.

Entonces para calcular la distancia hallaremos directamente un punto $Q$ en la recta $r$ de forma que el vector que lo une con $P = (-4, 1, 0)$ sea ortogonal a la recta. En ese caso sabemos que $d(P, r) = d(P, Q)$.

Comenzamos hallando las ecuaciones paramétricas de la recta resolviendo en función de un parámetro el sistema formado por sus dos ecuacioens implícitas. Sumándolas obtenemos $x = 2$ y después de la primera $y = z - 1$. Nos queda:

$$x = 2, \quad y = \lambda - 1, \quad z = \lambda.$$

Vemos también que el vector director de la recta es $(0, 1, 1)$.

Ahora un punto $Q$ de la recta será:

$$Q = (2, \lambda - 1, \lambda)$$

Imponemos que $PQ$ sea ortogonal a $(0, 1, 1)$:

$$PQ = Q - P = (6, \lambda - 2, \lambda)$$

y

$$0 = PQ \cdot (0, 1, 1) = (6, \lambda - 2, \lambda)G_C(0, 1, 1)^t = 6\lambda$$

Deducimos que $\lambda = 0$ y:

$$d(P, r) = d(P, Q) = \|PQ\| = \|(6, -2, -0)\| = \sqrt{(6, -2, 0)G_C(6, -2, 0)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

(1 punto)

---

**6.–** *En el plano afín euclideo hallar las ecuaciones de una simetría que lleva la recta $x = 0$ en la recta $3x + 4y - 4 = 0$. ¿Es única la solución?.*

El eje de simetría equidista de la recta original y su simétrica. Equivalentemente es cualquiera de las dos bisectrices de los dos ángulos que éstas determinan. Por tanto es claro que hay dos posibles soluciones.

Para hallar las bisectrices igualamos las distancias de un punto arbitario a ambas rectas:

$$\frac{|x|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|3x + 4y - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

Simplificando:

$$5|x| = |3x + 4y - 4|$$

de donde o bien:

$$5x = 3x + 4y - 4 \iff 2x - 4y + 4 = 0 \iff x - 2y + 2 = 0,$$

o bien:

$$-5x = 3x + 4y - 4 = 0 \iff 8x + 4y - 4 = 0 \iff 2x + y - 1 = 0.$$

Calculemos por ejemplo las ecuaciones de la simetría respecto a la recta $2x + y - 1 = 0$. Escogemos un punto cualquiera de la misma (verificando la ecuación que la define) por ejemplo $P = (0, 1)$.

Las ecuaciones de la simetía son entonces:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + T_c \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

donde $T - c$ es la matriz de la simetría. Para hallar lal matriz tomamos una base $B$ donde el primer vector el director del eje de simetría y el segundo ortogonal a el. El vector normal del eje es $(2, 1)$ y por tanto el director $(1, -2)$. Consideramos entonces la base $B$:

$$B = \{(1, -2), (2, 1)\}$$

Es esta base sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La pasamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B (M_{CB})^{-1})$$

donde $M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Operando resulta:

$$T_C = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & \\ -4/5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la ecuación de la simetría queda:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & \\ -4/5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

(1.3 puntos)

**7.–** *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

*(i) Clasificar la cónica.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = -4$ y $det(T) = 0$. Se trata por tanto de una parábola.

(ii) *Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.*

Dado que es una parábola no tiene ni centro ni asíntotas.

El eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo de $T$.

El polinomio característico de $T$ es:

$$|T - \lambda Id| = (1-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Por tanto el autovalor no nulo es $\lambda_1 = 2$. Sus autovectores asociados verifican

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y = 0$$

Por tanto $S_2 = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

El eje será la recta polar del vector $(1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 2 = 0 \iff x - y + 1 = 0.$$

El vértice es la intersección del eje y de la cónica. Resolvemos el sistema formado por sus respectivas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación $y = x + 1$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 + 4x + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 + 2x + 1 + 4x + 1 &= 0 \\ 4x + 2 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e $y = x + 1 = \dfrac{1}{2}$.

El vértice resulta $V = (-1/2, 1/2)$.

(iii) *Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.*

Por ser una parábola la excentricidad es $e = 1$.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 - 2cy'' = 0 \iff 2x''^2 - 2cy'' = 0,$$

donde
$$c = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}} = \sqrt{2}.$$
La ecuación reducida queda:
$$x''^2 - \sqrt{2}y'' = 0. \qquad (*)$$
Ahora sabemos que cuando está expresada de la forma $x^2 = 2py$ el foco está en el punto $(0, p/2)$ y el vértice en el origen. Por tanto la distancia focal es $p/2$. En nuestro caso si reescribimos:
$$x''^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'' = 0,$$
vemos que $p = \sqrt{2}/2$ y así la distancia del vértice al foco es $p/2 = \sqrt{2}/4$.

(1.5 puntos)

---

**8.–** *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto* $(1,2)$, *es tangente a la recta* $x+y-2=0$ *en el punto* $(2,0)$ *y pasa por el origen.*

Desarrollaremos la siguiente idea:

- Dado que una cónica es simétrica respecto a su centro podemos conocer otra tangente "duplicando" por simetría la dada.

- Después podemos formar el haz de cóncias conocidas dos tangentes y los dos puntos de tangencia.

- Finalmente imponemos que la cónica buscada pase por el origen.

Comenzamos hallando el simétrico $(p,q)$ del punto de tangencia $(2,0)$ respecto al centro $(1,2)$. Se ha de cumplir:
$$\frac{(p,q)+(2,0)}{2} = (1,2) \Rightarrow (p,q) = 2(1,2)-(2,0) = (0,4).$$

Después hallamos la recta simétrica de $x+y-2=0$ respecto del centro $(1,2)$. Pero la simétrica de una recta respecto a un punto es paralela a la recta original. Por tanto la recta buscada es la paralela a $x+y-2=0$ que pasa por el punto $(0,4)$ calculado antes. Será de la forma $x+y+d=0$. Imponiendo que pase por $(0,4)$:
$$0+4+d=0 \Rightarrow d=-4$$
La recta queda $x+y-4=0$.

El haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia esta generado por la cónica formada por el producto de ambas tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

La recta que une los puntos de tangencia $(2,0)$ y $(0,4)$ es:
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4} = 1 \iff 2x+y-4=0.$$
El haz queda:
$$(x+y-2)(x+y-4)+\lambda(2x+y-4)^2 = 0$$
Imponemos que pase por el origen:
$$(0+0-2)(0+0-4)+\lambda(2\cdot 0+0-4)^2 = 0 \iff \lambda = -1/2.$$
La ecuación queda:
$$(x+y-2)(x+y-4)-\frac{1}{2}(2x+y-4)^2 = 0.$$
Operando y simplificando:
$$2x^2-y^2-4x+4y=0.$$

(1.4 puntos)

---

**9.–** *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2xy + 2xz + 4yz + 2x + 2y + 4z - 2 = 0$$

*clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

La matriz asociada a la cuádrica es:

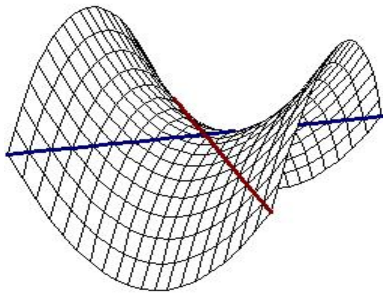
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La diagonalizamos por congruencia para clasificarla, teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser cambiada de lugar, ni sumada a otra, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos que no podemos seguir diagonalizando sin utilizar la cuarta fila en las formas contraindicadas.

Además la signatura de la matriz de términos cuadrticos es $(+, -, 0)$. Por tanto se trata de un paraboloide hiperbólico.



(0.6 puntos)