

1.— Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$w(x, y, z) = x^2 + 2axy + 4axz + az^2.$$

- (i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica y en la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$.
- (ii) Clasificar la forma cuadrática en función de los valores de a , indicando su rango y signatura.
- (iii) Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.
- (iv) Para $a = 0$ calcular el núcleo de w y los vectores autoconjugados.

(1.2 puntos)

2.— En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ son ortogonales.
- Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.
- Los tres vectores anteriores son unitarios.

- (i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.
- (ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$ respecto al producto escalar dado.

(1 punto)

3.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal t en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $\det(T) < 0$, $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$ y $\text{traza}(T) = 1$, clasificar y describir geoméricamente la transformación t .

(1 punto)

4.— Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, obtener una matriz P verificando que $P^t A P = P^{-1} A P$ sea diagonal.

(1 punto)

5.— En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto $(-4, 1, 0)$ y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(1 punto)

- 6.— En el plano afín euclideo hallar las ecuaciones de una simetría que lleva la recta $x = 0$ en la recta $3x + 4y - 4 = 0$. ¿Es única la solución?.

(1.3 puntos)

- 7.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.
- (iii) Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.

(1.5 puntos)

- 8.— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 2)$, es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ en el punto $(2, 0)$ y pasa por el origen.

(1.4 puntos)

- 9.— Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + 2xz + 4yz + 2x + 2y + 4z - 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

1.— Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ defínese a forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$w(x, y, z) = x^2 + 2axy + 4axz + az^2.$$

- (i) Calcular a matriz asociada a w na base canónica y na base $B = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$.
- (ii) Clasificar a forma cuadrática en función dos valores de a , indicando o seu rango e signatura.
- (iii) Para $a = 1$ calcular unha base de vectores conxugados.
- (iv) Para $a = 0$ calcular o núcleo de w e los vectores autoconxugados.

(1.2 puntos)

2.— En $\mathbb{R}^3$ considérase un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cumprindo:

- Os subespazos vectoriales $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$ e $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ son ortogonales.
- Os vectores $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.
- Os tres vectores anteriores son unitarios.

- (i) Calcular a matriz de Gram do produto escalar respecto da base canónica.
- (ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 3)\}$ calcular unha base do seu subespazo ortogonal $U^\perp$ respecto ó produto escalar dado.

(1 punto)

3.— Sexa T la matriz asociada a unha transformación ortogonal t no espazo eculideo $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\det(T) < 0$, $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$ e $\text{traza}(T) = 1$, clasificar e describir xeométricamente a transformación t .

(1 punto)

4.— Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, obter unha matriz P verificando que $P^t A P = P^{-1} A P$ sexa diagonal.

(1 punto)

5.— No espazo afín $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar con matriz de Gram respecto da base canónica:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular a distancia entre o punto $(-4, 1, 0)$ e a recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(1 punto)

- 6.— No plano afín euclideo atopar as ecuacions dunha simetría que leva a recta $x = 0$ na recta $3x+4y-4 = 0$.
É única a solución?.

(1.3 puntos)

- 7.— No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar a cónica.
(ii) Atopar o seu centro, eixos, vértices e asíntotas.
(iii) Calcular a súa ecuación reducida, excentricidade e distancia do vértice ó foco.

(1.5 puntos)

- 8.— Atopar a ecuación dunha cónica sabendo que o seu centro é o punto $(1, 2)$, é tanxente á recta $x+y-2 = 0$ no punto $(2, 0)$ y pasa pola orixe.

(1.4 puntos)

- 9.— Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + 2xz + 4yz + 2x + 2y + 4z - 2 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)