Álgebra Lineal II		**Examen Final**
Ejercicio único	(3 horas)	**13 de julio de 2018**

1.– *Dada la forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) *Calcular la matriz asociada a w en la base canónica. Clasificar la forma cuadrática indicando su rango y signatura.*

La matriz asociada a w en la base canónica, trasladando adecuadamente los coeficientes de la expresión dada queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_B$$

Vemos que tiene $rango = 2$ y $signatura = (1, 1)$. Se trata por tanto de una forma cuadrática degenerada e indefinida.

(ii) *Calcular una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cual la matriz asociada es la identidad. Entonces realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna hechas en el proceso de diagonalización y obtendremos la matriz M_{CB} siendo B (las columnas de la matriz) la base buscada.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

y así $B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados descomponiéndolos, si es posible, como unión de dos planos.*

Dado que la forma cuadrática es indefinida y de rango dos sabemos que los vectores autoconjugados se pueden descomponer como unión de dos planos. En concreto si trabajamos con la forma diagonal obtenida en el primer apartado y por tanto respecto a la base B obtenida en el segundo se tiene que:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x', y', z')_B | w(x', y', z) = 0\} = \{(x', y', z')_B | (x', y', z) F_B (x', y', z')^t = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x', y', z')_B | (x' - y')(x' + y) = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B | x' + y' = 0\} \cup \{(x', y', z')_B | x' - y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1, -1, 0)_B, (0, 0, 1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_B, (0, 0, 1)_B\} \end{aligned}$$

Cambiamos los vectores de la base B a la canónica para expresar el resultado respecto a esta última base:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de forma que:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(2, -1, 0), (-1, 0, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

(iv) *Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((1,0,1),(0,1,0))$.*

La matriz asociada a f es precisamente la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((1,0,1),(0,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(1.2 puntos)

2.– *En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera la aplicación:*

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(A,B) = traza(AB^t)$$

(i) *Demostrar que f es un producto escalar.*

Tenemos que comprobar que es una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

Veamos primero la simetría:

$$f(B,A) = traza(BA^t) = traza((BA^t)^t) = traza((A^t)^t B^t) = traza(AB^t) = f(A,B).$$

Por ser simétrica basta comprobar la bilinealidad en la primera componente. Hay que verificar que:

$$f(pA + qA', B) = pf(A,B) + qf(A',B)$$

para $A, A', B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $p, q \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Pero:

$$f(pA+qA',B) = tr((pA+qA')B^t) = tr(pAB^t + qA'B^t) = ptr(AB^t) + qtr(A'B^t) = pf(A,B) + qf(A',B).$$

Finalmente para ver que es definida positiva hallamos primero su matriz asociada en la base canónica:

$$C = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De forma que:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(E_1,E_1) & f(E_1,E_2) & f(E_1,E_3) & f(E_1,E_4) \\ f(E_2,E_1) & f(E_2,E_2) & f(E_2,E_3) & f(E_2,E_4) \\ f(E_3,E_1) & f(E_3,E_2) & f(E_3,E_3) & f(E_3,E_4) \\ f(E_4,E_1) & f(E_4,E_2) & f(E_4,E_3) & f(E_4,E_4) \end{pmatrix}.$$

Aprovechamos la simetría para reducir los cálculos:

$$f(E_1,E_1) = tr(E_1E_1^t) = 1, \quad f(E_2,E_1) = f(E_1,E_2) = tr(E_1E_2^t) = 0, \quad \text{etcétera...}$$

Obtenemos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene signatura $(4,0)$ y es por consiguiente definida positiva.

(ii) *Calcular la matriz de Gram de f respecto de la base canónica.*

Hemos visto en el apartado anterior que $F_C = Id$.

(iii) *Si $U = \mathcal{L}(Id)$, hallar una base del subespacio ortogonal $U^{\perp}$.*

Se tiene que:

$$U^{\perp} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | f(A, Id) = 0\}$$

Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sus coordenadas en la base canónica son $(x, y, z, t)_C$. Por tanto:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1)_C$$

y

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x, y, z, t)_C | (x, y, z, t) F_C (1, 0, 0, 1)^t = 0\} = \{(x, y, z, t)_C | x + t = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1, 0, 0, -1)_C, (0, 1, 0, 0)_C, (0, 0, 1, 0)_C\} \end{aligned}$$

La base pedida es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1 punto)

3.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ *sobre el plano* $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

El vector proyección pertence al plano U y por tanto es combinación lineal de sus generadores:

$$p(1, 1, 1) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = (a, a + b, b).$$

Tiene que cumplirse que la proyección menos el vector original sea perpendicular al plano:

$$p(1, 1, 1) - (1, 1, 1) \perp (1, 1, 0) \iff (a - 1, a + b - 1, b - 1) G_C (1, 1, 0)^t = 0 \iff 5a + 4b - 6 = 0$$
$$p(1, 1, 1) - (1, 1, 1) \perp (0, 1, 1) \iff (a - 1, a + b - 1, b - 1) G_C (0, 1, 1)^t = 0 \iff 4a + 6b - 7 = 0$$

Resolviendo $a = 4/7$ y $b = 11/14$, y así:

$$p(1, 1, 1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7} + \frac{11}{14}, \frac{11}{14}\right) = \left(\frac{4}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right).$$

(1 punto)

4.– *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual se considera el endomorfismo* $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. *Probar que* t *es una transformación ortogonal y describirla geométricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.*

La matriz asociada al endomorfismo en la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Para que sea una transformación ortogonal respecto al producto escalar usual basta verificar que $TT^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hallamos su determinante. $det(T) = -1$ y por tanto se trata de una simetría respecto a una recta.

El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T - I)(x, y)^t = (0, 0)^t \iff -2x + 4y = 0 \iff (x, y) || (2, 1).$$

Es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(2, 1)\}$. (1 punto)

5.– *En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto $P = (1,0,1)$ y que corta perpendicularmente a la recta:*

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Hallar también la distancia entre P y s.

Calcularemos el plano π perpendicular a s y pasando por el punto P, que contiene a la recta buscada.

Después hallamos $Q = \pi \cap S$ y finalmente la recta pedia es la recta PQ.

Las ecuaciones paramétricas de s, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones impícitas son:

$$x = -1 + 3t, \quad y = 4 - t, \quad z = t.$$

Por tanto el vector director de s es $u_s = (3,-1,1)$ y un plano perpendicular a ella es de la forma $3x - y + z + d = 0$. Imponemos que pase por $P = (1,0,1)$, $3 \cdot 1 - 0 + 1 + d = 0$, de donde , $d = -4$ y $\pi \equiv 3x - y + z - 4 = 0$.

Ahora para hallar $Q = \pi \cap S$ sustituimos las ecuaciones paramétricas de S en el plano π:

$$3(-1 + 3t) - (4 - t) + t - 4 = 0 \iff 11t - 11 = 0 \iff t = 1.$$

Luego $Q = (-1 + 3 \cdot 1, 4 - 1, 1) = (2,3,1)$.

La recta pedida es la recta PQ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-1}{1-1} \iff \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

La distancia del punto P a la recta s es precisamente la distancia entre los puntos P y Q:

$$d(P,s) = d(P,Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10}.$$

(1 punto)

6.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que transforme el punto $(2,1,0)$ en $(0,1,2)$.*

El plano de simetría es el plano que equidista del punto original y su simétrico; equivalentemente el plano que pasa por el punto medio de ambos y cuya normal es el vector que los une. Tenemos:

$$M = \frac{(2,1,0) + (0,1,2)}{2} = (1,1,1), \qquad (2,1,0) - (0,1,2) = (2,0,-2).$$

El plano es de la forma $2x - 2z + d = 0$ e imponiendo que pase por $(1,1,1)$, $2 \cot 1 - 2 \cdot 1 + d = 0$, es decir, $d = 0$. Queda $x - z = 0$.

Dado que el plano pasa por el origen las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix}$$

es decir, simplemente:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de la simetría respecto al subespacio $x - z = 0$.

Para hallar esa matriz construimos una base B formada por una base del plano y su ortgonoal:

$$B = \left\{ \underbrace{(1,0,1),(0,1,0)}_{plano}, \underbrace{(1,0,-1)}_{plano^{\perp}} \right\}.$$

En tal base la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y en la base canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones quedan:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff f(x,y,z) = (z,y,x).$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = 28$ y $det(T) = -4$. Se trata por tanto de una hipérbola.

(ii) *Hallar su centro, ejes, y asíntotas.*

El centro es un punto (x_0, y_0) verificando:

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

siendo h cualquier número real. Operando se obtienen las ecuaciones:

$$3x_0 + 2y_0 - 5 = 0, \quad 2x_0 - 2 = 0,$$

y resolviendo $C = (x_0, y_0) = (1,1)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. Tenemos:

$$p_T(\lambda) = det(T - \lambda Id) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Las raíces del polinomio característico son los autovalores:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = \frac{3 + \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Calculamos los respectivos autovectores:

- Asociados a $\lambda_1 = 4$:

$$(T - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 2y = 0 \iff (x, y)||(2, 1)$$

- Asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 4x + 2y = 0 \iff (x, y)||(-1, 2)$$

Los ejes son las corresponientes rectar polares:

$$(2, 1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 8x + 4y - 12 = 0 \iff 2x + y - 3 = 0.$$

$$(-1, 2, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 2y - 1 = 0 \iff x - 2y + 1 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asíntóticas. Si (p, q) es una dirección asintótica cumple:

$$(p, q)T(p, q)^t = 0 \iff 3p^2 + 4pq = 0 \iff p = 0 \text{ ó } p = -4q/3.$$

Obtenemos las direcciones $(0, 1)$ y $(4, -3)$. Las asíntotas resultan:

$$(0, 1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 2 = 0 \iff x - 1 = 0.$$

$$(4, -3, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x + 4y - 7 = 0 \iff 3x + 4y - 7 = 0.$$

(iii) *Calcular su ecuación reducida y excentricidad.*

La ecuación reducida es:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0$$

donde $d = \dfrac{det(A)}{det(T)} = -7$. Queda:

$$4x'^2 - y'^2 - 7 = 0 \iff 4x'^2 - y'^2 = 7 \iff \frac{x'^2}{7/4} - \frac{y'^2}{7} = 1.$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(7/4) + 7}}{\sqrt{7}/2} = \sqrt{5}.$$

(1.6 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una elipse de centro el punto* $(1,2)$*, un foco en* $(2,4)$ *y sabiendo además que la distancia entre los dos vértices situados sobre el eje menor es* 4*.*

Utilizando que la cónica es simétrica respecto al centro, calcularemos el segundo foco como simétrico del primero.

Después usaremos la definición de la elipse como lugar geométrico: la suma de distancias de puntos a los focos es constante igual a $2a$.

Por último tendremos en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$ donde b es el radio menor de la elipse y c la distancia del centro al foco.

Entonces, $C = (1,2)$, $F = (2,4)$, F' es el simétrico de F respecto de C:

$$\frac{F+F'}{2} = C \iff F' = 2C - F = (2,4) - (2,4) = (0,0).$$

Ahora de los datos dados $2b = 4$, es decir, $b = 2$ y $c = d(F', C) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$. Por tanto:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4+5} = 3.$$

Finalmente la ecuación de la elipse queda:

$$d(F,(x,y)) + d(F',(x,y)) = 2a \iff \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 6$$

Operando:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 6 - \sqrt{(x^2+y^2)}\\
&(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36 + x^2 + y^2 - 12\sqrt{x^2+y^2}\\
&x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 36 + x^2 + y^2 - 12\sqrt{x^2+y2}\\
&12\sqrt{x^2+y^2} = 4x + 8y + 16\\
&3\sqrt{x^2+y^2} = x + 2y + 4\\
&9(x^2+y^2) = (x+2y+4)^2\\
&9x^2 + 9y^2 = x^2 + 4y^2 + 16 + 4xy + 8x + 16y\\
&8x^2 - 4xy + 8y^2 - 8x - 16y - 16 = 0\\
&2x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 4y - 4 = 0
\end{aligned}$$

(1.4 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2xy + 3z^2 + 2yz + 2x + 2y + 4z + 2 = 0$$

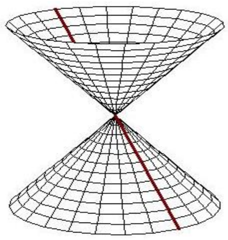
clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

Para clasificar la cuádrica diagonalizamos su matriz asociada por congruencia, teniendo en cuenta que la cuerta fila no puede ser movida, sumada a otra fila o multiplicada por un número.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{43}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que diagonaliza y los signos de la diagonal son $(+,-,+;0) \equiv (+,+,-;0)$. Se trata de un cono real.



(0.6 puntos)