Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **13 de julio de 2018**

1.– Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica. Clasificar la forma cuadrática indicando su rango y signatura.

(ii) Calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados descomponiéndolos, si es posible, como unión de dos planos.

(iv) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(1.2 puntos)

2.– En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(A, B) = traza(AB^t)$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Calcular la matriz de Gram de f respecto de la base canónica.

(iii) Si $U = \mathcal{L}(Id)$, hallar una base del subespacio ortogonal $U^\perp$.

(1 punto)

3.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ sobre el plano $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(1 punto)

4.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. Probar que t es una transformación ortogonal y describirla geométricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.

(1 punto)

5.– En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto $P = (1, 0, 1)$ y que corta perpendicularmente a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Hallar también la distancia entre P y s. (1 punto)

6.– En el espacio afín calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que transforme el punto $(2,1,0)$ en $(0,1,2)$.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

(ii) Hallar su centro, ejes, y asíntotas.

(iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

(1.6 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una elipse de centro el punto $(1,2)$, un foco en $(2,4)$ y sabiendo además que la distancia entre los dos vértices situados sobre el eje menor es 4.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + 3z^2 + 2yz + 2x + 2y + 4z + 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **13 de xullo 2018**

1.– Dada a forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) Calcular a matriz asociada a w na base canónica. Clasificar a forma cuadrática indicando o seu rango e as súa signatura.

(ii) Calcular unha base de vectores conxugados.

(iii) Atopar os vectores autoconxugados descompoñendoos, se é posible, como unión de dous planos.

(iv) Se f é a forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(1.2 puntos)

2.– No espazo vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera a aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(A, B) = traza(AB^t)$$

(i) Demostrar que f é un producto escalar.

(ii) Calcular a matriz de Gram de f respecto da base canónica.

(iii) Se $U = \mathcal{L}(Id)$, atopar unha base do subespazo ortogonal $U^\perp$.

(1 punto)

3.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar con matriz de Gram respecto da base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Atopar a proxección ortogonal do vector $(1, 1, 1)$ sobre o plano $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(1 punto)

4.– No espazo euclídeo $\mathbb{R}^2$ co producto escalar usual se considera o endomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. Probar que t é unha transformación ortogonal e describila xeométricamente indicando se procede o ángulo de xiro ou o eixo de simetría.

(1 punto)

5.– No espazo afín dar a ecuación dunha recta pasando polo punto $P = (1, 0, 1)$ e que corta perpendicularmente á recta:

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Atopar tamén a distancia entre P e s. (1 punto)

6.– No espazo afín calcular as ecuacións dunha simetría respecto a un plano que transforme o punto $(2, 1, 0)$ en $(0, 1, 2)$.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

(i) Clasificar a cónica.

(ii) Atopar o seu centro, eixos, e asíntotas.

(iii) Calcular a súa ecuación reducida e excentricidade.

(1.6 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha elipse de centro o punto $(1, 2)$, un foco en $(2, 4)$ e sabendo ademais que a distancia entre os dous vértices situados sobre o eixo menor é 4.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + 3z^2 + 2yz + 2x + 2y + 4z + 2 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
