Álgebra Lineal II		**Examen Parcial**
Geometría afín.	(45 minutos)	**29 de abril de 2019**

1.– *En el plano afín se considera una simetría respecto a una recta que lleva el punto* $(2, 3)$ *en el punto* $(0, -1)$.

(i) Hallar el eje de simetría.

El eje de simetría contiene al punto medio M del punto original $A = (2, 3)$ y su simétrico $A' = (0, -1)$, es decir, al punto:

$$M = \frac{A + A'}{2} = (1, 1).$$

Además el eje es perpendicular al vector que une A y A', o dicho de otra manera el vector $\vec{AA'}$ es el normal al eje:

$$\vec{AA'} = A' - A = (-2, -4)$$

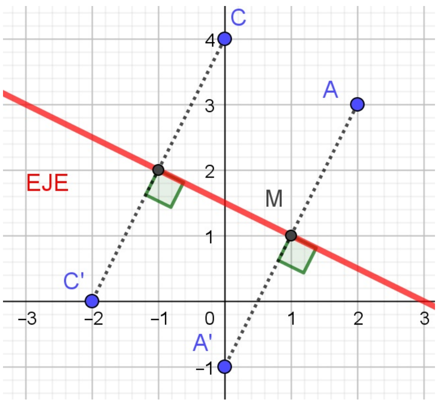
La recta pedida es por tanto la que tiene a $(-2, -4)$ (o equivalentemente dividiendo por -2 a $(1, 2)$) y pasa por $M = (1, 1)$. Por tener tal vector normal su ecuación es de la forma:

$$x + 2y - c = 0.$$

Imponemos que pase por $M = (1, 1)$:

$$1 + 2 \cdot 1 - c = 0 \Rightarrow c = 3.$$

El eje queda: $x + 2y - 3 = 0$.



(ii) *Hallar el simétrico del punto* $(0, 4)$.

Sea $C = (0, 4)$ el punto inicial y $C' = (a, b)$ su simétrico respecto al eje anterior.

Como antes el punto medio $\dfrac{C + C'}{2}$ tiene que pertenecer al eje $x + 2y - 3 = 0$:

$$\frac{C + C'}{2} = \frac{(0, 4) + (a, b)}{2} = \left(\frac{a}{2}, 2 + \frac{b}{2}\right).$$

Imponemos que cumpla la ecuación del eje $x + 2y - 3 = 0$:

$$\frac{a}{2} + 4 + b - 3 = 0 \iff a + 2b = -2.$$

Por otra parte el vector $\vec{CC'}$ debe de ser paralelo al vector normal $(1,2)$ del eje. Pero $\vec{CC'} = C' - C = (a, b-4)$. Por tanto:

$$\frac{a}{1} = \frac{b-4}{2} \iff 2a = b - 4 \iff 2a - b = -4$$

Nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} a + 2b &= -2 \\ 2a - b &= 4 \end{aligned}$$

De donde $a = -2$ y $b = 0$, es decir, $C' = (-2, 0)$.

2.– *Hallar la distancia entre las rectas r y s dadas por:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3y + z = 8 \end{cases}$$

Dado que trabajamos en las condiciones usuales (referencia canónica y producto escalar usual), usaremos la fórmula para la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Siendo A, $\vec{u}$ y B, $\vec{v}$ punto y vector director respectivamente de las rectas r y s.

Para hallar estos datos pasamos de ecuaciones implícitas a vectoriales resolviendo los sistemas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \iff x = 1, \quad y = \lambda, \quad z = 1 \iff (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0)$$

de donde $A = (1, 0, 1)$ y $\vec{u} = (0, 1, 0)$.

$$s \equiv \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4y \\ z = 8 - 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4\mu \\ y = \mu \\ z = 8 - 3\mu \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 8) + \mu(4, 1, -3)$$

de donde $B = (0, 0, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1, -3)$.

Entonces:

$$[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -25.$$

y

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3 = (-3, 0, -4)$$

Finalmente:

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|-25|}{\|(-3, 0, -4)\|} = \frac{25}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2}} = 5.$$

3.– *Calcular el centro del círculo circunscrito al triángulo de vértices* $A = (0,0,0)$*,* $B = (2,0,0)$ *y* $C = (0,2,4)$*.*

El centro del círulo circunscrito equidista de los tres vértices. Equivalentemente está en el plano que contiene al triángulo y en los planos mediatrices, es decir, los planos que pasan por el punto medio de cada lado y son perpendiculares a ellos.

Calculamos primero el plano que contiene al triángulo, es decir, a los puntos A, B, C:

$$det \begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 2-0 & 4-0 \end{pmatrix} = 0 \iff 4y - 2z = 0 \iff 2y - z = 0.$$

Ahora el plano mediatriz de A y B. El punto medio entre ambos es:

$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{(0,0,0)+(2,0,0)}{2} = (1,0,0).$$

El vector $\vec{AB} = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0)$ es el vector normal del plano buscado. Por tanto este es de la forma:

$$2 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d = 0$$

Imponiendo que pase por M_{AB} queda:

$$2 + d = 0 \iff d = -2$$

Por tanto el plano mediatriz de A y B es $2x - 2 = 0$; equivalentemente, $x - 1 = 0$.

Análogamente calculamos el plano mediatriz de A y C:

$$M_{AC} = \frac{A+C}{2} = \frac{(0,0,0)+(0,2,4)}{2} = (0,1,2).$$

El vector $\vec{AC} = (0,2,4) - (0,0,0) = (0,2,4)$ es el vector normal del plano buscado. Por tanto este es de la forma:

$$0 \cdot x + 2 \cdot y + 4 \cdot z + k = 0$$

Imponiendo que pase por M_{AC} queda:

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + k = 0 \iff k = -10$$

Por tanto el plano mediatriz de A y C es $2y + 4z - 10 = 0$; equivalentemente, $y + 2z - 5 = 0$.

El circuncentro es la intersección de los tres planos calculados:

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \\ y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo queda $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

(3 puntos)