Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **2 de marzo de 2017**

1.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$$

(i) *Clasificar w indicando además su rango y signatura.*

La matriz asociada en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 2 y es por tanto degenerada.

La signatura es $(1,1)$ y es indefinida.

(ii) *Calcular el conjunto de vectores autoconjugados. Si procede, indicar los subespacios en que se descompone.*

Dado que la forma cuadrática es indefinida y de rango 2 sabemos que el conjunto de vectores autoconjugados se descompone en uniónd e dos hiperplanos.

Si trabajamos con la forma diagonal calculada antes (que corresponde a la matriz asociada en una determinada base B), se tiene que:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x',y',z')_B | w(x',y',z') = 0\} = \\ &= \left\{ (x',y',z')_B | \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'^2 - y'^2\} = 0 \\ &= \{(x',y',z')_B | x'+y' = 0\} \cup \{(x',y',z')_B | x'-y' = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{(1,-1,0)_B, (0,0,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,1,0)_B, (0,0,1)_B\} \end{aligned}$$

Para escribir los resultados en la base canónica calculamos la matriz M_{CB} realizando sobre la identidad las mismas operaciones columna que se hicieron en la diagonalización:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Ahora hacemos el cambio de base:

$$M_{CB}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(2,-1,0), (-1,0,1)\} \cup \mathcal{L}\{(0,1,0), (-1,0,1)\}$$

(3 puntos)

2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la forma cuadrática:*

$$w(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2axy + 2bxz + 2cyz$$

(i) *Hallar* a, b, c *para que* $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *sea una base de vectores conjugados.*

Que la base B sea de vectores conjugados equivale a que la matriz asociada en tal base sea diagonal.

La matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

y en la base B:

$$F_B = (M_{CB})^t F_C M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1+a+b \\ 1+a & 3+2a & 3+2a+b+c \\ 1+a+b & 3+2a+b+c & 3+2a+2b+2c \end{pmatrix}$$

Para que sea diagonal tiene que cumplirse:

$$1+a=0, \qquad 1+a+b=0, \qquad 3+2a+b+c=0$$

de donde

$$a=-1, \qquad b=0, \qquad c=-1.$$

(ii) *Para los valores de* a, b, c *calculados en (i), hallar la matriz asociada a* w *en la base* B.

Sustituyendo en la expresión obtenida en el apartado anterior nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3 puntos)

3.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si* w *es una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^2$ *de rango* 1 *entonces tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDAERO. Si $rango(w) = 1$ entonces $dim(ker(w)) = 2-1 = 1$. Existen vector no nulos en el núcleo. Y todo vector del núcleo de una forma cuadrática es también autoconjugado.

(b) *Si* A *es la matriz asociada a una forma cuadrática* w *en* $\mathbb{R}^2$ *y* $det(A) = -1$ *entonces* w *es indefinida.*

VERDADERO. Recordemos que el signo del determinante se conserva por congruencia, es decir, por cambios de base de formas cuadráticas. Por tanto poemos razonar sobre la forma diagonal.

Si fuese semidefinida en la forma diagonalizada aparece un cero en la diagonal y el deteminante es nulo.

Si fuese definida positiva o negativa en la diagonal aparecen o dos elementos positivos o dos negativos; pero en cualquiera de los dos casos el determinante sería positivo.

Por tanto la única posibilidad es que sea indefinida.

(c) *Si* A *es la matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa* w *en* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $det(A) < 0$.

FALSO. Basta tomar como ejemplo w en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada en la base canónica $-Id$.

(d) *La aplicación* $f((x,y),(x',y')) = x + y + x' + y'$ *es una formal bilineal simétrica en* $\mathbb{R}^2$.

FALSO. No es bilineal. Si lo fuese debería de cumplir que:

$f(a(x,y),(x',y')) = af((x,y),(x',y'))$

Pero por ejemplo si $a = 2$ y $(x,y) = (x',y') = (1,0)$ se tiene:

$$f(a(x,y),(x',y')) = f(2(1,0),(1,0)) = f((2,0),(1,0)) = 2 + 0 + 1 + 0 = 3.$$

y

$$af((x,y),(x',y')) = 2 \cdot f((1,0),(1,0)) = 2(1 + 0 + 1 + 0) = 4.$$

(4 puntos)