Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **1 de marzo de 2017**

1.– *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(i) *¿Pueden ser A y B matrices asociadas a una misma forma cuadrátrica en distintas bases?.*

Dado que la matriz asociada a una forma cuadrática cambia de base por congruencia, dos matrices pueden estar asociadas a la misma forma cuadrática en distintas bases si y sólo si son congruentes. Entonces analizamos este hecho para las matrices dadas, diagonalizándolas por congruencia y comprobando si tienen la misma signatura:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Tienen la misma signatura $(1,1)$, por tanto si pueden ser matrices asociadas a la misma forma cuadrática en distintas bases.

(ii) *Si A es la matriz asociada respecto de la base canónica asociada a una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:*

ii.a) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella en la cuál la matriz asociada es diagonal. Como en el apartado anterior ya hemos diagonalizado A por congruencia, basta realizar sobre la identidad las mismas operaciones columna realizadas en ese proceso. Las columnas de la matriz obtenida serán los vectores de la base buscada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es: $\{(1,0),(-2,1)\}$.

ii.b) *Si f es la forma bilineal asociada a w, calcular $f((1,1),(0,1))$.*

Será matricialmente:

$$f((1,1),(0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

(3 puntos)

2.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz.$$

Clasificar w en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.

La matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-a)} \xrightarrow{\mu_{21}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-a)} \xrightarrow{\mu_{32}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a^2 \end{pmatrix}$$

Los dos primeros términos de la diagonal son positivos. El último se anula cuando $1-2a^2=0$, es decir, cuando $a=\pm\sqrt{2}/2$. Entonces distinguimos los siguintes casos:

	Signatura.	Rango.	Clasificación.
$a < -\sqrt{2}/2$	$(2,1)$	3	no degenerada e indefinida
$a = \sqrt{2}/2$	$(2,0)$	3	degenerada y semidefinida positiva
$-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$	$(3,0)$	3	no degenerada y definida positiva
$a = \sqrt{2}/2$	$(2,0)$	3	degenerada y semidefinida positiva
$a > \sqrt{2}/2$	$(2,1)$	3	no degenerada e indefinida

(3 puntos)

3.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si f es una forma bilineal simétrica y $f(u,u+v)=1$, $f(u,u)=1$ entonces u,v son vectores conjugados.*

VERDADERO. Por linealidad de la segunda componente, se tiene que: $f(u,u+v)=f(u,u)+f(u,v)$. Por tanto:

$$f(u,v)=f(u,u+v)-f(u,u)=1-1=0.$$

Y por tanto u y v son conjugados.

(b) *Si A es la matriz asociada a una forma cuadrática indefinida en $\mathbb{R}^n$, entonces $rango(A)<n$.*

FALSO. Por ejemplo si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ está asociada a una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, es indefinida pero $rango(A)=2$.

(c) *La matriz asociada a una forma cuadrátrica definida positiva puede tener un cero en la diagonal.*

FALSO. Dada una base $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$, en la diagonal de la matriz asociada a F_B aparecen los términos $f(u_i,u_i)=w(u_i)$. Por ser definida positiva son todos ellos positivos.

(d) *La aplicación $f((x,y),(x',y'))=x^2$ es una formal bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.*

FALSO. Por ejemplo, no es lineal en la primera componente. Si tomamos $u=(1,0)$, $v=(0,0)$ y $\lambda=2$ entonces:

$$f(\lambda u,v)=f((2,0),(0,0))=2^2=4$$

y sin embargo:

$$\lambda f(u,b)=2\cdot f((1,0),(0,0))=2\cdot 1^2=2\neq 4.$$

(4 puntos)
