Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **30 de mayo de 2017**

1.– *En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^2$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).*

La matriz asociada a una forma cuadrática es siempre simétrica. Su carácter queda determinado por su signatura. Esta puede obtenerse diagonalizando la matriz por congruencia.

(i) *w es definida positiva.*

Podemos tomar $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es definida positiva porque su signatura es $(2,0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *w es semidefinida negativa.*

Por ejemplo $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es semidefinida negativa porque su signatura es $(0,-1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *w es indefinida.*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es indefinida porque su signatura es $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(0.9 puntos)

2.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) *Probar que F_C define un producto escalar.*

Un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva. El enunciado ya nos dice que es una forma bilineal. Dado que su matriz asociada es simétrica, la correspondiente forma es también simétrica.

Sólo queda ver que es definida positiva, para ello comprobamos diagonalizando por congruencia que su signtaura es $(3,0)$:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Con respecto al producto escalar definido por f:*

a) *Calcular una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.*

Una base ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz del producto escalar es la identidad. Teniendo en cuenta que el cambio de base se hace por congruencia completamos la diagonalización del apartado anterior hasta llegar a Id:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \overset{\mu_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} = Id = F_B$$

Para hallar la base B realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización, obteniendo la matriz de cambio de base M_{CB}.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{BC}$$

Las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica son las columnas de la matriz:

$$B = \{(1,0,0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,-2,1)\}$$

b) *Calcular la norma del vector* $(-1,1,0)$.

Por definición:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}$$

y

$$(-1,1,0)\cdot(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

En definitiva:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}.$$

(1.2 puntos)

3.– *Sea G la matriz de Gram asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ respecto de la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Algún elemento de G puede ser negativo.*

VERDADERO. Por ejemplo:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de un producto escalar, por ser definida postiva (por el criterio de Sylvester: $|1| > 0$, $|G| = 1\cdot 2 - (-1)(-1) = 1 > 0$).

(ii) *Todos los elementos de la diagonal de G tienen que ser positivos.*

VERDADERO Los elementos de la diagonal corresponder por definición de matriz asociada al producto escalar de un vector de la base por si mismo. Como el producto escalar es una forma bilineal definida positiva ese producto siempre es positivo.

(iii) *Existe alguna base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de Gram del producto escalar dado es* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

FALSO. Para que una matriz esté asociada a un producto escalar ha de ser definida positiva. Pero el determinante de la dada es $-1 < 0$ y por el criterio de Sylvester NO es definida positiva.

(iv) *Existe alguna base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de Gram del producto escalar dado es* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

VERDADERO. Dos matrices simétricas t del mismo tamaño son congruentes si tienen la misma signatura. Equivalentemente están asociadas a una misma forma bilineal simétrica respecto a diferentes bases si tienen la misma signatura. La matriz dada tiene signatura $(2,0)$ por tanto la misma que cualquier producto escalar de $\mathbb{R}^2$.

(1.2 puntos)

4.– *En* $\mathbb{R}^2$ *respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal* $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) *Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.*

Para que sea una simetría debe de ser un transformación ortogonal con matriz asociada de determinante -1. Para que sea ortogonal tiene que cumplirse que $T_C T_C^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff a^2 + b^2 = 1, \quad 2ab = 0.$$

Para que el determinante sea 1:

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 1 \iff a^2 - b^2 = -1.$$

De las ecuaciones $a^2 + b^2 = 1$ y $a^2 - b^2 = -1$ obtenemos $a = 0$ y $b = \pm 1$. En ese caso se cumple además que $2ab = 0$.

Por tanto hay dos casos:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

ii) $a = 0$ $b = -1$.

(ii) *Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.*

El eje de simetría corresponde a los autovectores de T_C asociados al 1:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x - y = 0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1)\}$.

ii) $a = 0$ y $b = -1$.

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x + y = 0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

(1 punto)

5.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro con centro el punto $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$. Calcular la ecuación de la recta que se obtiene al aplicar el giro a la recta $x-2y+1=0$.*

La matriz de giro de ángulo $\pi/2$ respecto de la base canónica (respecto del producto escalar usual) es:

$$G = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El giro de centro $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$ tiene entonces por ecuaciones:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Para girar la recta $x-2y+1=0$ tomamos dos puntos de ella, los giramos por la fórmula calculada anteriormente y hallamos la recta que los une.

Dos puntos de la recta dada son por ejemplo $(-1,0)$ y $(1,1)$.

$$f(-1,0) = (3-0,-1+1) = (3,0), \qquad f(1,1) = (2,2).$$

La recta que une $(3,0)$ y $(2,2)$ es:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-0}{2-0} \iff 2x+y-6=0.$$

(1 punto)

6.– *En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por A,B,C,D a los cuatro vértices de la base y por E al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano $z=0$, que $A=(0,0,0)$ y $C=(4,2,0)$ son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:*

(i) *Las coordenadas de los tres vértices restantes.*

La longitud de la diagonal d del cuadrado es la distancia entre A y C:

$$d = d(A,C) = \sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{20}.$$

Por el Teorema de Pitágoras el lado l del cuadrado cumple:

$$l^2+l^2=d^2 \Rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

Los vértices B y D distan de C y A la distancia l. Además por estra en el plano $z=0$ son de la forma $(a,b,0)$. Por tanto planteamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} d(B,A)=\sqrt{10} \iff \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{10} \iff a^2+b^2=10 \\ d(B,C)=\sqrt{10} \iff \sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{10} \iff a^2-8a+16+b^2-4b+4=10 \end{array}$$

Restando las ecuaciones:

$$8a+4b=20 \Rightarrow b=5-2a$$

Sustituyendo en $a^2+b^2=10$:

$$a^2+(5-2a)^2=10 \iff 5a^2-20a+15=0 \iff a^2-4a+3=0 \iff a=\frac{4\pm\sqrt{4^2-12}}{2} \iff a=1 \text{ ó } a=3.$$

Si $a=1$ entoncse $b=5-2\cdot 1=3$ y si $a=3$ entonces $b=5-2\cdot 3=-1$.

Los vértices B y D son $B=(1,3,0)$ y $D=(3,-1,0)$.

El vértice E está sobre el punto medio M de la base, que es el punto medio de A y D y a altura 5:

$$M = \frac{A+C}{2} = (2,1,0).$$

Dado que el vector $(0,0,1)$ es unitario y perpendicular a la base

$$E = M \pm 5(0,0,1) = (2,1,\pm 5).$$

(hay dos posibles soluciones para el vértice E).

(ii) *El volumen de la pirámide.*

El volumen de una pirámide es:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{10 \cdot 5}{3} = \frac{50}{3}.$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0$$

(i) *Clasificar la cónica.* Para evitar "arrastrar" fracciones en las operaciones multiplicamos por 2 la ecuación:

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 + 2x + 2y = 0.$$

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes son:

$$det(A) = -10, \qquad det(T) = -5.$$

Se trata por tanto de una hipérbola.

(ii) *Hallar su centro, ejes y vértices.*

El centro es el punto (a,b) verificando la ecuación:

$$A\,(\,a \quad b \quad 1\,) = (\,0 \quad 0 \quad h\,) \iff 2a - 3b + 1 = 0, \quad -3a + 2b + 1 = 1 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $(a,b) = (1,1)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. Comenzamos calculando el polinomio característico de T:

$$det(T - \lambda Id) = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$.

Calculamos los correspondientes autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 = (1,1).$$

Asociados a $\lambda_2 = 5$:

$$(T - 5Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = (1, -1).$$

Finalmente los ejes son sus rectas polares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

Los vértices son la intersección de los ejes con la cónica. Intersecamos el primero:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = 2 - x$. Sustiyuendo en la segunda:

$$5x^2 - 10x + 6 = 0 \iff x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2} \text{ el discrimiante es negativo.}$$

Luego este eje no corta a la cónica.

Intersecamos ahora el segundo:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = x$. Sustiyuendo en la segunda:

$$-x^2 + 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 2.$$

Los vértices son entonces $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

(iii) *Calcular su ecuación reducida y excentricidad.*

Para la ecuación reducida tomamos como primer autovalor el que tiene el mismo signo que $det(A)$. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0.$$

Donde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ y:

$$d = \frac{A}{\lambda_1 \lambda_2} = -10 - 5 = 2.$$

Queda:

$$-x''^2 + 5y''^2 + 2 = 0.$$

O equivalentemtene expresada en forma canónica:

$$x''^2 - 5y''^2 = 2 \iff \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2/5} = 1$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2 + \frac{2}{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

(1.5 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica que pasa por el punto* $(3,2)$*, tiene por asíntota la recta* $x-y=0$ *y por eje* $x-2y+1=0$.

El eje de la cónica es un eje de simétría. Por tanto seguiremos el siguiente camino:

- el simétrico de la asínota es la segunda asínota.

- formaremos el haz conocidas dos asíntotas.

- impondremos que pase por el punto $(3,2)$.

Para hallar el simétrico de la asíntota tenemos en cuenta en primer lugar que tiene que pasar por la intersección del eje y de la asíntota dada:

$$\left\{\begin{array}{l} 0=x-y \\ 0=x-2y+1 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=(1,1).$$

Después tomamos un punto cualquiera de la asíntota y calculamos su simétrico. Un punto de la asíntota es por ejemplo $A=(0,0)$. El simétrico $A'=(a,b)$ cumplirá:

- $\dfrac{A+A'}{2} \in eje$; es decir, $(a/2,b/2)\in eje \iff (a/2)-2(b/2)+1=0 \iff a-2b+2=0.$

- $\vec{AA'}\perp eje$; es decir $\vec{AA'}||normal_{eje} \iff (a,b)||(1,-2) \iff \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \iff 2a+b=0.$

Resolviendo $A'=(a,b)=(-2/5,4/5)$.

La segunda asíntota es la recta que une $(1,1)$ y $(-2/5,4/5)$:

$$\frac{x-1}{(-2/5)-1}=\frac{y-1}{4/5-1} \iff x-7y+6=0.$$

El haz de cónicas dadas las dos asíntotas es:

$$(x-y)(x-7y+6)+\lambda=0.$$

Imponemos que pase por $(3,2)$:

$$(3-2)(3-7\cdot 2+6)+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=5.$$

La ecuación pedida es:

$$(x-y)(x-7y+6)+5=0 \iff x^2-8xy+7y^2+6x-6y+5=0.$$

(1.4 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$y^2+5z^2-2xy+2xz+4yz-2y+3=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

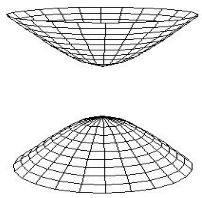
Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni cambiada de posición , ni sumada a las demás, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(3)} \xrightarrow{\mu_{32}(3)} \xrightarrow{H_{42}(-1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(1/10)} \xrightarrow{\mu_{43}(1/10)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29/10 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(+, -+; +) \sim (+, +, -; +)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de dos hojas.



(0.6 puntos)