Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **30 de mayo de 2017**

1.– En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^2$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).

(i) w es definida positiva.

(ii) w es semidefinida negativa.

(iii) w es indefinida.

(0.9 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que F_C define un producto escalar.

(ii) Con respecto al producto escalar definido por f:

a) Calcular una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcular la norma del vector $(-1, 1, 0)$.

(1.2 puntos)

3.– Sea G la matriz de Gram asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ respecto de la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Algún elemento de G puede ser negativo.

(ii) Todos los elementos de la diagonal de G tienen que ser positivos.

(iii) Existe alguna base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de Gram del producto escalar dado es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(iv) Existe alguna base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de Gram del producto escalar dado es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.

(ii) Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.

(1 punto)

5.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro con centro el punto $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$. Calcular la ecuación de la recta que se obtiene al aplicar el giro a la recta $x - 2y + 1 = 0$.

(1 punto)

6.– En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por A, B, C, D a los cuatro vértices de la base y por E al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano $z = 0$, que $A = (0,0,0)$ y $C = (4,2,0)$ son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:

(i) Las coordenadas de los tres vértices restantes.

(ii) El volumen de la pirámide.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

(ii) Hallar su centro, ejes y vértices.

(iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica que pasa por el punto $(3,2)$, tiene por asíntota la recta $x - y = 0$ y por eje $x - 2y + 1 = 0$.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 3 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II		**Exame Final**
Exercicio único	(3 horas.)	**30 de maio 2017**

1.– En cada un dos seguintes apartados dar unha matriz non diagonal asociada a unha forma cuadrática w de $\mathbb{R}^2$ que cumpra ademais a condicion indicada (xustificar as respostas).

(i) w é definida positiva.

(ii) w é semidefinida negativa.

(iii) w é indefinida.

(0.9 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera unha forma bilineal f de matriz asociada respecto á base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que F_C define un producto escalar.

(ii) Con respecto ó producto escalar definido por f:

a) Calcular unha base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcular a norma do vector $(-1, 1, 0)$.

(1.2 puntos)

3.– Sexa G a matriz de Gram asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ respecto da base canónica. Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacions:

(i) Algún elemento de G pode ser negativo.

(ii) Todos os elementos da diagonal de G teñen que ser positivos.

(iii) Existe algunha base de $\mathbb{R}^2$ respecto da cal a matriz de Gram do producto escalar dado é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) Existe algunha base de $\mathbb{R}^2$ respecto da cal a matriz de Gram do producto escalar dado é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ respecto ó producto escalar usual se considera unha transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matriz asociada respecto da base canónica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) Atopar a e b para que t sexa unha simetría respecto a unha recta.

(ii) Para cada un dos valores de a e b obtidos no apartado anterior calcular o eixo de simetría.

(1 punto)

5.– No plano afín atopar as ecuacions dun xiro con centro o punto $(1,2)$ e ángulo $\pi/2$. Calcular a ecuación da recta que se obtén ao aplicar o xiro á recta $x-2y+1=0$.

(1 punto)

6.– No espazo afín consideramos unha pirámide regular de base cadrada. Denotamos por A, B, C, D ós catro vértices da base e por E ó vértice superior. Sabendo que a base está contida no plano $z=0$, que $A=(0,0,0)$ e $C=(4,2,0)$ son vértices opostos da base e que a altura da pirámide é 5 calcular:

(i) As coordenadas dos tres vértices restantes.

(ii) O volumen da pirámide.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$x^2-3xy+y^2+x+y=0$$

(i) Clasificar a cónica.

(ii) Atopar o seu centro, eixos e vértices.

(iii) Calcular a súa ecuación reducida e excentricidade.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica que pasa polo punto $(3,2)$, ten por asíntota a recta $x-y=0$ e por eixo $x-2y+1=0$.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$y^2+5z^2-2xy+2xz+4yz-2y+3=0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
