Álgebra Lineal II		**Soluciones del Examen Final**
Ejercicio único	(3 horas)	**10 de Julio de 2017**

1.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera una forma cuadrática* w *cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Clasificar la forma cuadrática en función de* a*, indicando su rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada realizando las mismas operaciones elementales fila y columna:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-(a-1))}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-(a-1))}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 \end{pmatrix}$$

El tipo de forma cuadrática depende de los signos de la diagonal. Para distinguir casos estudiamos cuando se anulan los términos de la diagonal:

$$2a - a^2 = 0 \iff a(2-a) = 0 \iff a = 0 \text{ ó } a = 2.$$

Distinguimos:

-Si $a < 0$ entonces: $sign(2,1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.

-Si $a = 0$ entonces: $sign(2,0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.

-Si $0 < a < 2$ entonces: $sign(3,0)$, $rango = 2$ y es por tanto no degenerada y definida positiva.

-Si $a = 2$ entonces: $sign(2,0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.

-Si $a > 2$ entonces: $sign(2,1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.

(ii) *Para* $a = 1$ *calcular una base de vectores conjugados.*

Es una base en la cual la forma cuadrática diagonaliza. Para hallar realizamos sobre la identidas las mismas operaciones columna realizadas en el proceso de diagonalización. Obtendremos la matriz M_{CB} siendo B la base buscada.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto la base pedida es:

$$B = \mathcal{L}\{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

(iii) *Para* $a = 0$ *calcular los vectores autoconjugados.*

Dado que para $a = 0$ la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$autoconj(w) = ker(f) = \{(x,y,z) | F_c(x,y,z)^t = 0\}$$

Quedan las ecuaciones:

$$x + y + z = 0, \quad x + 2y = 0, \quad x + 2z = 0$$

Eliminando dependientes y resolviendo:

$$autoconj(w) = ker(f) = \{(x, y, z) | F_c(x, y, z)^t = 0\} = \mathcal{L}\{(2, -1, -1)\}.$$

(iv) *¿Para qué valores de a la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.*

La forma bilineal es simétrica por estar asociada a una forma cuadrática. Es producto escalar cuando además es definida positiva, es decir, según vimos en (i) cuando $0 < a < 2$.

(1.2 puntos)

2.– *Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:*

- *Los vectores* $(1, 0)$ *y* $(0, 1)$ *forma un ángulo de* 60 *grados.*
- $\|(1, 1)\| = \sqrt{3}$.
- $B = \{(1, 0), (1, -2)\}$ *es una base ortogonal.*

Sabemos que la matriz de Gram de un producto escalar es simétrica:

$$G_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por ser b una base ortogonal:

$$(1, 0) \cdot (1, -2) = 0 \iff (1 \quad 0)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \iff a - 2b = 0.$$

Dado que $\|(1, 1)\| = \sqrt{3}$:

$$3 = \|(1, 1)\|^2 = (1, 1) \cdot (1, 1) \iff 3 = (\, 1 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + 2b + c = 3$$

De estas dos ecuaciones ya tenemos que:

$$a = 2b, \quad c = 3 - 4b \quad \Rightarrow \quad G_C = \begin{pmatrix} 2b & b \\ b & 3 - 4b \end{pmatrix}$$

Finalmente si los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forma un ángulo de 60 grados:

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = \|(1, 0)\| \|(0, 1)\| cos(60)$$

donde:

$$\|(1, 0)\|^2 = (1, 0) \cdot (1, 0) = (\, 1 \quad 0\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2b$$

$$\|(0, 1)\|^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (\, 0 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 4b$$

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (\, 1 \quad 0\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Nos queda:

$$b = \sqrt{2b(3 - 4b)} \cdot \frac{1}{2}$$

Quitando denominadores y elevando al cuadrado:

$$4b^2 = 6b - 8b^2 \iff 2b^2 = b$$

de donde $b = 0$ ó $b = 1/2$.

Si $b = 0$ entonces $G_C = 0$ y eso noes posible por ser la matriz de un producto escalar definida positiva.

Por tanto $b = 1/2$ y $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

(0.9 puntos)

3.– *Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si A es un giro entonces $traza(A) \geq -1$.*

VERDADERO. Recordemos que las trazas de las matrices asociadas a endomorfismos se conservan por cambios de base. Si es un giro en una base adecucada la matria asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y

$$traza(A) = traza(A') = 1 + 2cos(\alpha) \geq 1 + 2 \cdot (-1) = -1.$$

(ii) *Si $traza(A) = 1$ entonces A es un giro.*

FALSO. Por ejemplo si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces es la matriz asociada a una simetría respecto a un plano, pero $traza(A) = 1 + 1 - 1 = 1$.

(iii) *Si A es una simetría respecto a una recta entonces $det(A) = 1$.*

VERDADERO. Si es una simetría respecto a una recta, entonces en una determinada base la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con $det(A') = 1$. Como el determinante se conserva al cambiar de base tenemos que la afirmación es cierta.

(iv) *Si $traza(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.*

FALSO. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

con $\alpha = 120^o$ se trata de un giro, pero su traza es $1 + 2cos(120^o) = 0$.

(1.2 puntos)

4.– *En el espacio afín dadas las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(i) *Hallar la ecuación de una recta l cortando a ambas rectas y perpendicular a ellas.*

Tomaremos un punto genérico P de la recta r, otro Q de la recta s e impondremos que el vector que los une sea perpendicular a ambas rectas.

La ecuación vectorial de r es:

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + \lambda(1, 1, 1).$$

Tomamos $P = (2, 1, 2) + \lambda(1, 1, 1)$.

La ecuación vectorial de s, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones implícitas queda:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 1) + \mu(1, 1, 0).$$

Entonces $Q = (-1,0,1) + \mu(1,1,0)$.

El vector que une P y Q es:

$$\vec{PQ} = Q - P = (-3,-1,-1) + \mu(1,1,0) - \lambda(1,1,1).$$

Imponemos que sea perpendicular a ambas rectas, es decir, que el producto escalar con sus vectores directores sea nulo:

$$\vec{PQ} \cdot (1,1,1) = 0 \iff -5 + 2\mu - 3\lambda = 0$$
$$\vec{PQ} \cdot (1,1,0) = 0 \iff -4 + 2\mu - 2\lambda = 0$$

Resolviendo, $\lambda = -1$ y$\mu = 1$. Entonces $P = (2,1,2) - 1\cdot(1,1,1) = (1,0,1)$ y $Q = (-1,0,1) + 1\cdot(1,1,0) = (0,1,1)$.

La recta pedida es la que une P y Q. Su ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(0-1, 1-0, 1-1)$$

sus paramétricas:

$$x = 1 - t, \qquad y = t, \qquad z = 1$$

y sus implícitas:

$$x + y = 1, \qquad z = 1.$$

(ii) *Hallar la distancia entre r y s.*

La distancia entre las rectas es la misma que la distancia entre los puntos P y Q calculados en el apartado anterior:

$$d(r,s) = d(P,Q) = \|Q - P\| = \|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}.$$

También podría usarse la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{[\vec{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$

donde $A = (2,1,2)$ (punto de r), $B = (-1,0,1)$ (punto de s), y $\vec{u}_r = (1,1,1)$ y $\vec{u}_s = (1,1,0)$ son respectivamente los vectores directores de r y s.

(1 punto)

5.– *En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de un giro de ángulo 90^o y semieje generado por el vector $(3,0,4)$.*

Primero construimos una base ortgononal bien orientada con el primer vector el semieje de giro $\vec{u}_1 = (3,0,4)$.

Buscamos un segundo vector ortogonal al primero:

$$(x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 \iff 3x + 4z = 0.$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (0,1,0)$. Escogemos un vector ortogonal a los dos anteriores:

$$(x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 \iff 3x + 4z = 0$$
$$(x,y,z) \cdot (0,1,0) = 0 \iff y = 0$$

Tomamos $\vec{u}_3 = (4,0,-3)$.

Comprobamos si la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ está bien orientada, estudiando el signo del determinante de la matriz de cambio de base con respcto a la base canónica:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

Por tanto no está bien orientada. Cambiamos el signo del tercer vector para corregirlo y normalizamos:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|} = (3/5,0,4/5), \quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = (0,1,0), \quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|} = (-4/5,0,3/5)$$

Entonces la base $B = \{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ es una base ortonormal bien orientada con el primer vector en la misma dirección y sentido que el semieje.

En esa base la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}T_BM_{CB}^t$$

donde

$$M_{CB} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$ por ser una matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

Operando resulta:

$$T_C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Y las ecuaciones del giro son:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

6.– *En el plano afín se considera la circunferencia $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ y la recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando por el origen, sea A el punto de intersección (distinto del origen) de c y h y B el punto de intersección de r y h. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje OX por A y la paralela al eje OY por B.*

La circunferencia tiene centro $(3,0)$ y radio 3; la ecuación simplificada es: $x^2 - 6x + y^2 = 0$.

Tomamos una recta arbitraria h pasando por el origen $x = ay$ (notamos que la recta $y = 0$ no hace falta considerarla porque no corta a r).

Hallamos el punto de corte entre c y h.

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 6x + y^2 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$a^2y^2 - 6ay + y^2 = 0 \iff y((1+a^2)y - 6a) = 0$$

de donde $y = 0$ ó $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$. Nos quedamos con el corte distinto del origen. Como $x = ay$ queda:

$$A = \left(\frac{6a^2}{1+a^2}, \frac{6a}{1+a^2}\right).$$

Ahora cortamos r y h:

$$\begin{cases} 0 = y - 3 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$B = (3a, 3).$$

La paralela al eje OX por A es $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$.

La paralela al eje OY por B es $x = 3a$.

Y la intersección de ambas:

$$x = 3a, \qquad y = \frac{6a}{1+a^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico. Para hallar la implícita despejamos el parámetro a en la primera y sustiyuimos en la segunda Queda:

$$y = \frac{2x}{1+(x/3)^2} \iff y = \frac{18x}{x^2+9} \iff yx^2 + 9y - 18x = 0.$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$ se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2kxy + y^2 - 2x = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

Las matrices asociada y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Clasificamos en función de los signos de los determinantes de A y T:

$$|A| = -1, \qquad |T| = 1 - k^2.$$

Distinguimos los casos tomando como límites los valores de k que anulan los determinantes:

$$1 - k^2 = 0 \iff k = 1 \text{ ó } k = -1.$$

Entonces:

- Si $k < -1$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.

- Si $k = -1$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parábola.

- Si $-1 < k < 1$, $|A| < 0$ y $|T| > 0$. Se trata de una elipse real.

- Si $k = 1$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parbola.

- Si $k > 1$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) *Para $k = 1$:*

(ii.a) *Hallar su centro, asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.*

Para $k = 1$ viemos que es una parábola. Por tanto no tiene centro ni asíntotas y su excentricadad es 1.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 0.$$

Calculamos el autovector asociado al $\lambda = 2$:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

Resolviendo tomamos $\vec{u}_1 = (1,1)$.

El eje es su recta polar:

$$(\,1 \quad 1 \quad 0\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y - 1 = 0.$$

El vértice es la intersección del eje y la cónica:

$$\begin{cases} 0 = 2x + 2y - 1 \\ 0 = x^2 + 2xy + y^2 - 2x \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $V = (1/8, 3/8)$.

(ii.b) *Calcular la ecuación de la tangente a la cónica en el origen.*

La tangente en el punto $(0,0)$ es:

$$(\,0 \quad 0 \quad 1\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x = 0.$$

(1.5 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $(3,4)$, un foco en $(0,0)$ y excentricidad $e = 5/6$.*

El segundo foco F' de la elipse es el simétrico del primero respecto del centro:

$$\frac{F' + (0,0)}{2} = (3,4) \Rightarrow F' = (6,8).$$

Usamos ahora la caracterización de la elipse como lugar geométrico: la suma de las distancias de un punto de la curva a los focos es constante igual a $2a$.

$$d((x,y),(0,0)) + d((x,y),(6,8)) = 2a$$

Finalmente sabemos que $e = c/a$, es decir, $a = c/e$ y $c = d(foco, centro) = d((0,0),(3,4)) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. De donde:

$$a = c/e = 5/(5/6) = 6.$$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2} = 2 \cdot 6$$

Operamos para simplificarla:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x^2-12x+36+y^2-16y+64} = 12-\sqrt{x^2+y^2}\\
&x^2-12x+36+y^2-16y+64 = 144+x^2+y^2-24\sqrt{x^2+y^2}\\
&24\sqrt{x^2+y^2} = 12x+16y+44\\
&6\sqrt{x^2+y^2} = 3x+4y+11\\
&36(x^2+y^2) = (3x+4y-11)^2\\
&36x^2+36y^2 = 9x^2+16y^2+121+24xy+66x+88y\\
&27x^2-24xy+20y^2-66x-88y-121 = 0
\end{aligned}
$$

(1.4 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2-8y^2+2xy+4xz-8yz+8y+8z+2=0$$

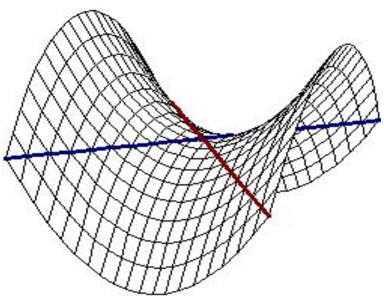
clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

Clasificamos la cuádrica diagonalizando su matriz asociada por congruencia; tenemos en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -8 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{H_{21}(-1)}\underset{\longrightarrow}{H_{31}(-2)}\underset{\longrightarrow}{\mu_{21}(-1)}\underset{\longrightarrow}{\mu_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -6 & 4\\ 0 & -6 & -4 & 4\\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underset{\longrightarrow}{H_{32}(-2/3)}\underset{\longrightarrow}{H_{41}(4/9)}\underset{\longrightarrow}{\mu_{32}(-2/3)}\underset{\longrightarrow}{\mu 41(4/9)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4/3\\ 0 & 0 & 4/3 & 34/9 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin usar la cuarta fila de alguna de las formas contraindicadas. El tipo de cuádrica queda determinado por la signatura de la matriz de términos cuadráticos $(+,-,0)$. Se trata entonces de un paraboloide hiperbólico.



(0.6 puntos)
