Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **10 de Julio de 2017**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática en función de a, indicando su rango y signatura.

(ii) Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Para $a = 0$ calcular los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de a la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.

(1.2 puntos)

2.– Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- Los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forma un ángulo de 60 grados.
- $\|(1, 1)\| = \sqrt{3}$.
- $B = \{(1, 0), (1, -2)\}$ es una base ortogonal.

(0.9 puntos)

3.– Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si A es un giro entonces $traza(A) \geq -1$.

(ii) Si $traza(A) = 1$ entonces A es un giro.

(iii) Si A es una simetría respecto a una recta entonces $det(A) = 1$.

(iv) Si $traza(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio afín dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(i) Hallar la ecuación de una recta l cortando a ambas rectas y perpendicular a ellas.

(ii) Hallar la distancia entre r y s.

(1 punto)

5.– En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de un giro de ángulo 90^o y semieje generado por el vector $(3, 0, 4)$.

(1 punto)

6.– En el plano afín se considera la circunferencia $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ y la recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando por el origen, sea A el punto de intersección (distinto del origen) de c y h y B el punto de intersección de r y h. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje OX por A y la paralela al eje OY por B.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$ se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 - 2x = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de k.

(ii) Para $k = 1$:

(ii.a) Hallar su centro, asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.

(ii.b) Calcular la ecuación de la tangente a la cónica en el origen.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $(3, 4)$, un foco en $(0, 0)$ y excentricidad $e = 5/6$.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8y^2 + 2xy + 4xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **10 de xullo 2017**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera unha forma cuadrática w de matriz asociada respecto á base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar a forma cuadrática en función de a, indicando o seu rango e as súa signatura.

(ii) Para $a = 1$ calcular unha base de vectores conxugados.

(iii) Para $a = 0$ calcular os vectores autoconxugados.

(iv) Para qué valores de a a forma bilineal asociada a w é un producto escalar?.

(1.2 puntos)

2.– Atopar a matriz de Gram respecto da base canónica dun producto escalar, sabendo que:

- Os vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ forman un ángulo de 60 grados.
- $\|(1, 1)\| = \sqrt{3}$.
- $B = \{(1, 0), (1, -2)\}$ é una base ortogonal.

(0.9 puntos)

3.– Sexa A a matriz asociada a unha transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a unha base cualquera. Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacions:

(i) Se A é un xiro entón $traza(A) \geq -1$.

(ii) Se $traza(A) = 1$ entón A é un xiro.

(iii) Se A é unha simetría respecto a unha recta entón $det(A) = 1$.

(iv) Se $traza(A) = 0$ entón A é un xiro composto cunha simetría respecto a un plano.

(1.2 puntos)

4.– No espazo afín dadas as rectas de ecuacions:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(i) Atopar a ecuación dunha recta l cortando a ambas rectas e perpendicular a elas.

(ii) Atopar a distancia entre r e s.

(1 punto)

5.– No espazo vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ atopar as ecuacions dun xiro de ángulo 90^o e semieixo xerado polo vector $(3, 0, 4)$.

(1 punto)

6.– No plano afín se considera a circunferencia $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ e a recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando pola orixe, sexa A o punto de intersección (distinto da orixe) de c e h e B o punto de intersección de r e h. Calcular a ecuación implícita do lugar xeométrico de puntos de intersección da paralela ó eixo OX por A e a paralela ó eixo OY por B.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$ se considera a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 - 2x = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de k.

(ii) Para $k = 1$:

(ii.a) Atopar o seu centro, asíntotas, eixos, vértices e excentricidade.

(ii.b) Calcular a ecuación da tanxente á cónica pola orixe.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha elipse que ten o centro no punto $(3, 4)$, un foco en $(0, 0)$ e excentricidade $e = 5/6$.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8y^2 + 2xy + 4xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
