

- 1.— En el plano afín y en las condiciones usuales calcular las ecuaciones de un giro de centro $(1, 2)$ y ángulo 45° . Hallar la ecuación implícita de la recta que resulta al aplicar el giro a $r \equiv x + y - 1 = 0$.

En general la ecuación de un giro de centro (a, b) y ángulo α es:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

En nuestro caso queda:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

o simplificando:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

Para girar la recta $x + y - 1 = 0$ tomamos dos puntos de la misma, los giramos mediante la ecuación anterior y hallamos la ecuación de la recta que los une. Si $x = 0$ obtenemos $y = 1$; si $y = 0$ obtenemos $x = 1$. Por tanto la recta une los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$. Les aplicamos las ecuaciones de giro:

$$\begin{aligned} t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto la recta girada es la que une los puntos $A' = (1, 2 - \sqrt{2})$, $B' = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$, es decir:

$$y = 2 - \sqrt{2}.$$

(3 puntos)

-
- 2.— Si $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 0, 4)$, $C = (0, 5, 0)$ son tres vértices en una misma cara de un cubo, hallar la ecuación de un plano que contiene a la cara opuesta. ¿Es única la solución?. Calcular el área y el volumen del cubo.

Los tres puntos de la misma cara forma un triángulo isósceles. La longitud común a dos lados es la arista L del cubo:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = 5 \\ d(A, C) &= \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (0-0)^2} = 5 \\ d(B, C) &= \sqrt{(0-3)^2 + (5-0)^2 + (0-4)^2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Por tanto $L = 5$.

El plano buscado es paralelo al plano π que contiene a los vértices A, B, C y a distancia L de cualquiera de los vértices, por ejemplo, de A .

La ecuación de π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3-0 & 0-0 & 4-0 \\ 0-0 & 5-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \iff 4x - 3z = 0.$$

Cualquier plano paralelo al mismo, por tener el mismo vector normal, es de la forma:

$$4x - 3z + d = 0$$

Imponemos que esté a distancia 5 del origen:

$$\frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + d|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad |d| = 25$$

Por tanto hay dos posibles soluciones:

$$4x - 3z + 25 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 3z - 25 = 0.$$

El área del cubo es seis veces el área de cada cara $A = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$. El volumen es $V = L^3 = 5^3 = 125$.

(4 puntos)

3.— *En el plano afín dado el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 4)$ y $(4, 2)$ hallar su ortocentro.*

El ortocentro es la intersección de las alturas del triángulo. Las alturas son las rectas perpendiculares a cada lado y que pasan por el vértice opuesto.

Calculamos la recta pasando por $(0, 0)$ y perpendicular al segmento que une $(2, 4)$ y $(4, 2)$. El vector normal de la recta será $(4, 2) - (2, 4) = (2, -2)$; simplificamos tomando $(1, -1)$. La altura es por tanto de la forma:

$$x - y + c = 0$$

Imponiendo que pase por el origen obtenemos $c = 0$ y así la altura tiene por ecuación $x - y = 0$.

Hallamos ahora la recta pasando por $(2, 4)$ y perpendicular al segmento que une $(0, 0)$ y $(4, 2)$. El vector normal es $(4, 2) - (0, 0) = (4, 2)$, o simplificando, $(2, 1)$. La recta será de la forma:

$$2x + y + d = 0$$

Imponemos que pasar por $(2, 4)$:

$$2 \cdot 2 + 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -8$$

La segunda altura queda $2x + y - 8 = 0$.

Terminamos intersecando ambas alturas resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Queda $(x, y) = (8/3, 8/3)$.

(3 puntos)
