Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Geometría afín. (45 minutos) **25 de abril de 2018**

1.– *En el plano afín y en las condiciones usuales calcular las ecuaciones de una homotecia de centro* $(1,2)$ *y razón* -2. *Hallar la ecuación implícita de la recta que resulta al aplicar la homotecia a* $r \equiv x+y-1=0$.

En general la ecuación de una homotecia de centro (a,b) y razón k es:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

En nuestro caso queda:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

o simplificando:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x \\ 6-2y \end{pmatrix}$$

Para hallar la recta homotética de $x+y-1=0$ tomamos dos puntos de la misma, los transformamos mediante la ecuación anterior y hallamos la ecuación de la recta que los une. Si $x=0$ obtenemos $y=1$; si $y=0$ obtenemos $x=1$. Por tanto la recta une los puntos $A(0,1)$ y $B(1,0)$. Les aplicamos las ecuaciones de la homotecia:

$$t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2\cdot 0 \\ 6-2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2\cdot 2 \\ 6-2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Por tanto la recta transformada es la que une los puntos $A'=(3,4)$, $B'=(1,6)$, es decir:

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-4}{6-4} \quad\iff\quad x+y-7=0.$$

(3 puntos)

2.– *Si* $A=(0,0,0)$, $B=(-3,0,4)$, $C=(0,5,0)$ *son tres vértices en una misma cara de un cubo, hallar la ecuación de un plano que contiene a la cara opuesta. ¿Es única la solución?. Calcular el área y el volumen del cubo.*

Los tres puntos de la misma cara forma un tringulo isósceles. La longitud común a dos lados es la arista L del cubo:

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-0)^2+(0-0)^2+(4-0)^2} = 5$$
$$d(A,C) = \sqrt{(0-0)^2+(0-5)^2+(0-0)^2} = 5$$
$$d(B,C) = \sqrt{(0+3)^2+(5-0)^2+(0-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

Por tanto $L=5$.

El plano buscado es paralelo al plano π que contiene a los vértices A,B,C y a distancia L de cualquiera de los vértices, por ejemplo, de A.

La ecuación de π es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -3-0 & 0-0 & 4-0 \\ 0-0 & 5-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \quad\iff\quad 4x+3z=0.$$

Cualquier plano paralelo al mismo, por tener el mismo vector normal, es de la forma:

$$4x + 3z + d = 0$$

Imponemos que esté a distancia 5 del origen:

$$\frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + d|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |d| = 25$$

Por tanto hay dos posibles soluciones:

$$4x + 3z + 25 = 0 \quad \text{y} \qquad 4x + 3z - 25 = 0.$$

El área del cubo es seis veces el área de cada cara $A = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$. El volumen es $V = L^3 = 5^3 = 125$.

(4 puntos)

3.– *En el plano afín dado el triángulo de vértices* $(0,0), (2,4)$ *y* $(4,2)$ *hallar su circuncentro.*

El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Se obtiene como la intersección de las mediatrices. Estas son las rectas perpendiculares a cada lado y que pasan por su punto medio.

Calculamos la recta perpendicular al segmento que une $(2,4)$ y $(4,2)$, y pasando por su punto medio. El vector normal de la recta será $(4,2) - (2,4) = (2,-2)$; simplificamos tomando $(1,-1)$. La mediatriz es por tanto de la forma:

$$x - y + c = 0$$

El punto medio es $\dfrac{(2,4) + (4,2)}{2} = (3,3)$. Imponiendo que pase por él obtenemos $c = 0$ y así la mediatriz tiene por ecuación $x - y = 0$.

Hallamos ahora la recta perpendicular al segmento que une $(0,0)$ y $(4,2)$, y pasando por su punto medio. El vector normal es $(4,2) - (0,0) = (4,2)$, o simplificando, $(2,1)$. La recta será de la forma:

$$2x + y + d = 0$$

El punto medio es $\dfrac{(0,0) + (4,2)}{2} = (2,1)$. Imponiendo que pase por él:

$$2 \cdot 2 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -5$$

La segunda mediatriz queda $2x + y - 5 = 0$.

Terminamos intersecando ambas mediatrices resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Queda $(x,y) = (5/3, 5/3)$.

(3 puntos)
