Álgebra Lineal II — Solución del Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **29 de febrero de 2015**

1.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x,y,z) = x^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

(i) *Clasificar* w *en función de* a *indicando además en cada caso su rango y signatura.*

La matriz asociada a w en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el tercer término de la diagonal se anula cuando $a-1=0$, es decir, cuando $a=1$. Distinguimos los siguientes casos:

- Si $a<1$ entonces la signatura es $(1,2)$ y el rango 3. Se trata de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

- Si $a=1$ entonces la signatura es $(1,1)$ y el rango 2. Se trata de una forma cuadrática degenerada e indefinida.

- Si $a>1$ entonces la signatura es $(2,1)$ y el rango 3. Se trata de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados respecto de* w.

Es una base B en la cuál la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal. Entonces, para hallar la matriz de cambio de base M_{CB}, hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en la diagonalización por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

(4 puntos)

2.– *En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se define la forma bilineal:*

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A,B) = traza(A^t \cdot B)$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

Comprobamos primero que es simétrica para ahorrar cálculos en la matriz asociada:

$$f(B,A) = traza(B^t \cdot A) = traza((B^t \cdot A)^t) = traza(A^t \cdot B) = f(A,B).$$

(hemos usado que la traza de una matriz coincide con la de su traspuesta).

La base canónica es $C = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La matriz asociada en esta base es aquella tal que:

$$(F_C)_{ij} = f(E_i, E_j)$$

Por simetría sabemos además que $(F_C)_{ij} = (F_C)_{ji}$. Entonces:

$$(F_C)_{11} = f(E_1,E_1) = traza(E_1^t \cdot E_1) = 1.$$
$$(F_C)_{12} = f(E_1,E_2) = traza(E_1^t \cdot E_2) = 0.$$
$$(F_C)_{13} = f(E_1,E_3) = traza(E_1^t \cdot E_3) = 0.$$
$$(F_C)_{14} = f(E_1,E_4) = traza(E_1^t \cdot E_4) = 0.$$
$$(F_C)_{22} = f(E_2,E_2) = traza(E_2^t \cdot E_2) = 1.$$
$$(F_C)_{23} = f(E_2,E_3) = traza(E_2^t \cdot E_3) = 0.$$
$$(F_C)_{24} = f(E_2,E_4) = traza(E_2^t \cdot E_4) = 0.$$
$$(F_C)_{33} = f(E_3,E_3) = traza(E_3^t \cdot E_3) = 1.$$
$$(F_C)_{34} = f(E_3,E_4) = traza(E_3^t \cdot E_4) = 0.$$
$$(F_C)_{44} = f(E_4,E_4) = traza(E_4^t \cdot E_4) = 1.$$

Por tanto la matriz asociada (completada por simetría) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Probar que f es simétrica.*

Lo hemos visto en el apartado anterior.

(iii) *Si w es la forma cuadrática asociada a f hallar $w(A)$. ¿Cuánto vale $w\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?.*

Se tiene que $w(A) = f(A,A) = traza(A^tA)$.

Para hallar $w\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ podemos operar de dos formas:

- Directamente:

$$w\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = traza\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = traza\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 6.$$

- Mediante la matriz asociada:

$$w\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = w((1,2,0,1)_C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 = 6.$$

(3 puntos)

3.– *Sea* $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma cuadrática. Si* $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *es su matriz asociada respecto a la base* $B = \{(1,2),(1,0)\}$*, calcular* $f((1,-1),(2,3))$ *siendo* f *la forma bilineal simétrica asociada a* w*.*

Primero pasamos la matriz asociada a la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = M_{BC}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{BC} = (M_{CB}^{-1})^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (M_{CB})^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$f((1,-1),(2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.$$

(3 puntos)