

1.— En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:

$$w(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

(i) Clasificar w en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.

La matriz asociada a w en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el segundo término de la diagonal se anula cuando $a - 1 = 0$, es decir, cuando $a = 1$. Distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 1$ entonces la signatura es $(2, 1)$ y el rango 3. Se trata de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

- Si $a = 1$ entonces la signatura es $(2, 0)$ y el rango 2. Se trata de una forma cuadrática degenerada y semidefinida positiva.

- Si $a > 1$ entonces la signatura es $(3, 0)$ y el rango 3. Se trata de una forma cuadrática no degenerada y definida positiva.

(ii) Hallar una base de vectores conjugados respecto de w .

Es una base B en la cuál la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal. Entonces, para hallar la matriz de cambio de base M_{CB} , hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en la diagonalización por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

(4 puntos)

2.— En el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales se define la forma bilineal:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(0)q(1) + p(1)q(0)$$

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

Comprobamos primero que es simétrica para ahorrar cálculos en la matriz asociada.

$$f(p(x), q(x)) = p(0)q(1) + p(1)q(0) = q(0)p(1) + q(1)p(0) = f(q(x), p(x)).$$

La base canónica es $C = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\}$. La matriz asociada en esta base es aquella tal que:

$$(F_C)_{ij} = f(p_i(x), p_j(x))$$

Por simetría sabemos además que $(F_C)_{ij} = (F_C)_{ji}$. Entonces:

$$\begin{aligned} (F_C)_{11} &= f(p_1(x), p_1(x)) = p_1(0)p_1(1) + p_1(1)p_1(0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ (F_C)_{12} &= f(p_1(x), p_2(x)) = p_1(0)p_2(1) + p_1(1)p_2(0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \\ (F_C)_{13} &= f(p_1(x), p_3(x)) = p_1(0)p_3(1) + p_1(1)p_3(0) = 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0^2 = 1 \\ (F_C)_{22} &= f(p_2(x), p_2(x)) = p_2(0)p_2(1) + p_2(1)p_2(0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ (F_C)_{23} &= f(p_2(x), p_3(x)) = p_2(0)p_3(1) + p_2(1)p_3(0) = 0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0^2 = 0 \\ (F_C)_{33} &= f(p_3(x), p_3(x)) = p_3(0)p_3(1) + p_3(1)p_3(0) = 0^2 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la matriz asociada (completada por simetría) es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Probar que f es simétrica.

Visto en el apartado anterior.

(iii) Si w es la forma cuadrática asociada a f hallar $w(p(x))$. ¿Cuánto vale $w(1 - 2x + x^2)$?

Se tiene que:

$$w(p(x)) = f(p(x), p(x)) = p(0)p(1) + p(1)p(0) = 2p(0)p(1)$$

Para hallar $w(1 - 2x + x^2)$ podemos operar de dos formas:

- Directamente:

$$w(1 - 2x + x^2) = 2(1 - 2 \cdot 0 + 0^2)(1 - 2 \cdot 1 + 1^2) = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

- Mediante la matriz asociada:

$$w(1 - 2x + x^2) = w((1, -2, 1)_C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(3 puntos)

- 3.**— Sea $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Si $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es su matriz asociada respecto a la base $B = \{(1, 2), (1, 0)\}$, calcular $f((1, -1), (2, 3))$ siendo f la forma bilineal simétrica asociada a w .

Primero pasamos la matriz asociada a la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = M_{BC}^t \cdot Id \cdot M_{BC} = (M_{CB}^{-1})^t (M_{CB})^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$f((1, -1), (2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

(3 puntos)
