Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **23 de mayo de 2016**

1.– *En el espacio afín se considera la recta r de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

y el punto $P = (3, 1, 1)$.

(i) *Calcular la ecuación implícita de todos los planos perpendiculares a r y que distan 1 unidad del punto P.*

Los planos perpendiculares a r tiene por vector normal su vector director. Calculemos éste pasando de las implícitas de r a paramétricas:

$$2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$$

y

$$y + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 - y = -2x + 1$$

Por tanto las paramétricas de r son:

$$x = \lambda, \qquad y = 2\lambda + 1, \qquad z = -2\lambda + 1.$$

El vector director de r es $(1, 2, -2)$. Los planos perpendiculares a esta recta son de la forma:

$$x + 2y - 2z + d = 0.$$

La distancia de tales planos al punto $P(3, 1, 1)$ es:

$$\frac{|3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 + d|}{3}$$

Igualando la distancia a una unidad queda:

$$\frac{|3 + d|}{3} = 1 \iff |3 + d| = 3 \iff 3 + d = \pm 3$$

de donde $d = 0$ ó $d = -6$. Los dos planos en las condiciones pedidas son:

$$x + 2y - 2z = 0 \text{ y } x + 2y - 2z - 6 = 0.$$

(ii) *Calcular la ecuación paramétrica de una recta que corte perpendicularmente a r y pasando por P.*

Puede construirse tomando un plano perpendicular a r pasando por P y cortándolo con r de manera que obtendremos un punto Q de corte que unido con P nos da la recta pedida.

Según hemos visto en (i) un plano perpendicular a r es de la forma:

$$x + 2y - 2z + d = 0.$$

Imponemos que pase por $P(3, 1, 1)$:

$$3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3.$$

Cortamos el plano $x+2y-2z-3=0$ con la recta r resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de uno y otra:

$$\left\{\begin{aligned} x+2y-2x-3&=0\\ 2x-y+1&=0\\ y+z-2&=0\end{aligned}\right.$$

Resulta $Q=(1/3,5/3,1/3)$. La recta pedida pasa por P y tiene por vector director $\vec{PQ}=Q-P=(-8/3,2/3,-2/3)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x=3-\frac{8}{3}\lambda,\qquad y=1+\frac{2}{3}\lambda,\qquad z=1-\frac{2}{3}\lambda.$$

(iii) *Calcular las ecuaciones cartesianas de la recta simétrica de r respecto al punto P.*

Una recta simétrica a otra respecto a un punto es paralela a ésta. Por tanto buscamos una recta con el mismo vector director que r y que pase por el simétrico respecto a P de un punto A de r.

Hemos visto en (i) que r pasa por el punto $A=(0,1,1)$. El simétrico A' respecto a P cumple:

$$\frac{A+A'}{2}=P\Rightarrow A'=2P-A=2(3,1,1)-(0,0,0)=(6,1,1).$$

La recta pedida es la que pasa por $(6,1,1)$ y tiene por vector director $(1,2,-2)$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

Simplificando quedan las ecuaciones cartesianas:

$$\left\{\begin{aligned} 2x-y-11&=0\\ z+y-2&=0\end{aligned}\right.$$

(1.5 puntos)

2.– *Sea el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$; se considera una forma bilineal $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$F_C=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&6&0\\1&0&a\end{pmatrix}$$

(i) *¿Para qué valores de a es f un producto escalar?.*

Para que sea un producto escalar la forma bilineal tiene que ser simétrica y definida positiva. Como la matriz asociada es simétrica, la correspondiente forma bilineal también lo es. Para ver que es definida positiva la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C\overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&a-1\end{pmatrix}\overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&a-3\end{pmatrix}.$$

Para que sea definida positiva la signatura ha de ser $(3,0)$ es decir $a-3>0$.

Por tanto f es un producto escalar si y sólo si $a>3$.

(ii) *Calcular a para que los vectores $(1,0,1)$ y $(0,3,-1)$ sean ortogonales respecto al producto escalar definido por f.*

Tiene que cumpirse que:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}F_C\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}=0$$

Operando queda:
$$6 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 5.$$

(iii) *Para $a = 4$ y con respecto al producto escalar que define f dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.*

Una base ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz del producto escalar es la identidad. En el apartado (i) y con $a = 4$ hemos llegado a la forma diagonal:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Completamos la congruencia hasta llegar a la identidad:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base de la base ortonormal a la canńonica es la matriz de paso por columnas de la congruencia que hemos realizado; para hallarla hacemos las mismas operaciones columna de ese proceso sobre la identidad:
$$Id \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{2} & -3 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base ortonormal es:
$$\{(1,0,0), (-2/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-3,1,1)\}.$$

El ángulo entre $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ es:
$$arcos \frac{(1,0,0) \cdot (0,1,0)}{\|(1,0,0)\| \|(0,1,0)\|}$$

donde:
$$(1,0,0) \cdot (0,1,0) = (1,0,0) F_C (0,1,0)^t = 2.$$

y
$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0) \cdot (1,0,0)} = \sqrt{(1,0,0) F_C (1,0,0)^t} = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0) \cdot (0,1,0)} = \sqrt{(0,1,0) F_C (0,1,0)^t} = \sqrt{6}$$

El ángulo queda:
$$arcos \frac{2}{\sqrt{6}} = arcos \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(1.3 puntos)

3.– *Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:*

Recordemos en primer lugar, que la traza de una matriz de una aplicación lineal no depende de la base en la que se trabaje, ya que se conserva por semejanza.

(i) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$?.*

Sabemos que en una base adecuacada la matriz asociada a una transformación orotogonal es:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro}$$

y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro compuesto con simetría}$$

En el primer caso la traza es $1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $1 + 2 = 3$.

En el segundo caso la traza es $-1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $-1 + 2 = 1$.

Por tanto el valor máximo de la traza es 3.

(ii) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en* $\mathbb{R}^3$*?.*

Si la transformación es inversa es un giro compuesto con simetría. Según hemos visto en el apartado anterior el valor máximo de su traza es 1.

(iii) *Si la matriz asociada a un giro en* $\mathbb{R}^3$ *tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?.*

Según hemos visto en (i) la traza de una matriz de giro es $1 + 2cos(\alpha)$. Si es nula se deduce que $cos(\alpha) = -1/2$ y por tanto el ángulo es $arcccos(-1/2) = \pm 120^o$.

(iv) *Si* f *es una simetría del plano con el producto escalar usual y* $f(1,2) = (-1,-2)$*. ¿Cuál es el eje de simetría?.*

Vemos que $f(1,2) = -(1,2)$. Por tanto $(1,2)$ es perpendicular al eje de simetría y es el vector normal del eje de giro. Este será entonces: $x + 2y = 0$.

(1.2 puntos)

4.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de* 90^o *respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:*

$$(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(3,0,4), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

(1.2 puntos)

Las ecuaciones de giro son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

donde T_C es la matriz de giro de semieje generado por $(3,0,4)$ y ángulo 90^o.

Para hallar la matriz T_C construimos una base ortonormal B bien orientada donde el primer vector será el generador del semieje normalizado:

- Buscamos un vector $\vec{u}_2$ perpendicular a $(3,0,4)$:

$$(x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 \iff 3x + 4z = 0$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (0,1,0)$.

- Buscamos un segundo vector $\vec{u}_3$ perpendicular a $(3,0,4)$ y $(0,1,0)$:

$$\begin{aligned} (x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 &\iff 3x + 4z = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,1,0) = 0 &\iff y = 0 \end{aligned}$$

Tomamos $\vec{u}_3 = (-4,0,3)$.

Comprobamos si la base $\{(3,0,4),(0,1,0),(-4,0,3)\}$ tiene orientación positiva:

$$det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 25 > 0 \Rightarrow \text{Orientación positiva.}$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|} = (3/5,0,4/5), \quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = (0,1,/0), \quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|} = (-4/5,0,3/5)$$

Tenemos una base $B = \{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ ortonormal bien orientada. En esa base la matriz de giro de $\alpha = 90^o$ es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Usamos además que por ser C y B ambas ortonormales, $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$. Operando queda:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{CB}^t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del giro son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se dispone de la siguiente información:*

- Los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ son conjugados.

- $w(1,0,1) = 1$ y $w(0,1,0) = -1$.

- $ker(f) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$.

(i) *Calcular la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

Calculamos primero la matriz asociada en la base $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ que es sobre la cuál tenemos información.

- Como $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ son conjugados $f((1,0,1),(0,1,0)) = 0$.

- Como $w(1,0,1) = 1$ y $w(0,1,0) = -1$ entonces $f((1,0,1),(1,0,1)) = 1$ y $f((0,1,0),(0,1,0)) = -1$.

- Como $ker(f) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$. entonces $f((0,1,1),(x,y,z)) = 0$ para cualquier vector (x,y,z).

Por tanto:

$$F_B = \begin{pmatrix} f((1,0,1),(1,0,1)) & f((1,0,1),(0,1,0)) & f((1,0,1),(0,1,1)) \\ f((0,1,0),(1,0,1)) & f((0,1,0),(0,1,0)) & f((0,1,0),(0,1,1)) \\ f((0,1,1),(1,0,1)) & f((0,1,1),(0,1,0)) & f((0,1,1),(0,1,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base a la canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Clasificar la correspondiente forma cuadrática indicando además su rango y signatura.*

La matriz F_B ya es la forma diagonal. Vemos que tiene rango 2 y signatura $(1, -1)$. Por tanto es indefinida y degenerada.

(iii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cual la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal. Ya hemos visto en (i) que la base $B = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$ cumple esa condición.

(iv) *Hallar el conjunto de vectores autoconjugados, indicando si es posible los subespacios en los que se divide. Expresar los resultados respecto de la base canónica.*

En la base $B = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$ la expresión de la forma cuadrática es:

$$w(x', y', z') = (x', y', z') F_B (x', y', z')^t = x'^2 - y'^2.$$

Los vectores autoconjugados cumplen:

$$w(x', y', z') = 0 \iff x'^2 - y'^2 = 0 \iff (x' - y')(x' + y') = 0$$

Se divide por tanto en los subespacios:

$$\{(x', y', z')_B | x' - y' = 0\} = \mathcal{L}\{(1,1,0)_B, (0,0,1)_B\}$$
$$\{(x', y', z')_B | x' + y' = 0\} = \mathcal{L}\{(1,-1,0)_B, (0,0,1)_B\}$$

Finalmente pasamos los vectores de la base B a la canónica multiplicando por la matriz de cambio de base:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$M_{CB}(1,1,0)^t = (1,1,1)^t, \quad M_{CB}(1,-1,0)^t = (1,-1,1)^t, \quad M_{CB}(0,0,1) = (0,1,1)$$

Y por tanto los vectores autoconjugados son la unión de los subespacios:

$$\mathcal{L}\{(1,1,1), (0,1,1)\} \cup \mathcal{L}\{(1,-1,0), (0,1,1)\}.$$

(1.3 puntos)

6.– *En el plano afín se considera la familia de cónicas:*

$$x^2 + 2axy + 2y^2 + 2x - 6ay + 1 = 0, \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(i) *Clasificar la cónica en función del parámetro a.*

Clasificamos en función de los signos de los determinantes de las matrices asociada y de términos cuadráticos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 2 & -3a \\ 1 & -3a & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|A| = -16a^2, \qquad |T| = 2 - a^2$$

Para hacer la tabla estudiamos cuando se anulan los determinantes para saber los casos límite. Vemos que $|A| = 0$ si $a = 0$ y $|T| = 0$ si $a = +\sqrt{2}$ ó $a = -\sqrt{2}$.

Entonces:

- Si $a < -\sqrt{2}$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.
- Si $a = -\sqrt{2}$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parábola.
- Si $-\sqrt{2} < a < 0$, $|A| < 0$ y $|T| > 0$. Se trata de una elipse real.
- Si $a = 0$, $|A| = 0$ y $|T| > 0$ se trata de rectas complejas cortándose en un punto real.
- Si $0 < a < \sqrt{2}$, $|A| < 0$ y $|T| > 0$. Se trata de una elipse real.
- Si $a = \sqrt{2}$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parábola.
- Si $a > \sqrt{2}$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) *Para $a = 1$ calcular el centro de la cónica.*

Para $a = 1$ es una elipse real. El centro es el punto (p, q) verificando que:

$$A(p, q, 1)^t = (0, 0, h)^t \text{ donde } h \text{ es cualquier valor}$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$p + q + 1 = 0, \qquad p + 2q - 3 = 0$$

de donde $(p, q) = (-5, 4)$.

(iii) *Para $a = \sqrt{2}$ calcular la distancia entre el vértice y el foco.*

Para $a = \sqrt{2}$ la cónica es una parábola. Para hallar la distancia entre vértice y foco hallamos la ecuación reducida en la forma:

$$x''^2 = 2py''$$

La distancia entre vértices y foco es $p/2$.

Para hallar la ecuación reducida comenzamos calculando los autovectores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ó } \lambda = 0.$$

La ecuación reducida es de la forma:

$$3x''^2 - 2cy' = 0$$

con

$$c = \sqrt{\frac{-|A|}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Queda entonces:

$$3x''^2 - 2\frac{4\sqrt{6}}{3}y' = 0 \iff x''^2 - 2\frac{4\sqrt{6}}{9}y' = 0.$$

De donde $p = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ y la distancia pedida es $p/2 = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.

(iv) *¿Para qué valores de a la excentricidad de la cónica es mayor que 1?.*

La excentricidad es mayor que 1 para las hipérbolas, es decir, cuando $a < -\sqrt{2}$ ó $a > \sqrt{2}$.

(1.6 puntos)

7.– *Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que pasa por los puntos $P = (0, 3)$, $Q = (2, 6)$ y tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$.*

Usaremos que el eje es una recta de simetría para hallar los simétricos P' y Q' de los puntos P y Q.

Después construiremos el haz de cónicas que pasan por cuatro puntos.

Finalmente del haz seleccionamos las parábolas imponiendo que la matriz de términos cuadráticos tenga determinante nulo.

Sea $P' = (a, b)$ el simétrico de $P = (0, 3)$ respecto al eje $x - y + 1 = 0$ (que tiene por vector director el $(1, 1)$).

- Se cumple que $\dfrac{P + P'}{2} \in eje$, es decir, $\dfrac{a}{2} - \dfrac{b+3}{2} + 1 = 0$.

- El vector $\vec{P}P'$ es perpendicular al eje. Por tanto $\vec{P}P' \cdot (1, 1) = 0$ es decir $a + b - 3 = 0$.

Resolviendo se obtiene $P' = (2, 1)$.

Sea $Q' = (c, d)$ el simétrico de $Q = (2, 6)$ respecto al eje $x - y + 1 = 0$ (que tiene por vector director el $(1, 1)$).

- Se cumple que $\dfrac{Q + Q'}{2} \in eje$, es decir, $\dfrac{c+2}{2} - \dfrac{d+6}{2} + 1 = 0$.

- El vector $\vec{Q}Q'$ es perpendicular al eje. Por tanto $\vec{Q}Q' \cdot (1, 1) = 0$ es decir $c - 2 + d - 6 = 0$.

Resolviendo se obtiene $Q' = (5, 3)$.

Formamos ahora el haz de cónica que pasan por P, P', Q, Q'. Construimos una primera cónica con las rectas PP' y QQ:

- Recta PP', une $P = (0, 3)$ y $P' = (2, 1)$. Queda: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-3}{1-3}$. Simplificando: $x + y - 3 = 0$.

- Recta QQ', une $Q = (2, 6)$ y $Q' = (5, 3)$. Queda: $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-6}{3-6}$. Simplificando: $x + y - 8 = 0$.

La segunda cónica con las rectas PQ' y $P'Q$.

- Recta PQ', une $P = (0, 3)$ y $Q' = (5, 3)$. Es $y = 3$, es decir, $y - 3 = 0$.

- Recta $P'Q$, une $P' = (2, 1)$ y $Q' = (2, 6)$. Es $y = 2$, es decir, $y - 2 = 0$.

El haz de cónicas queda:

$$(x + y - 3)(x + y - 8) + \lambda(x - 2)(y - 3) = 0$$

Operando:

$$x^2 + 2 + \lambda xy + y^2 - (11 + 3\lambda)x - (11 + 2\lambda y) + 24 - 6\lambda = 0.$$

La matriz de términos cuadráticos es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & (2+\lambda)/2 \\ (2+\lambda)/2 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante es cero si:

$$1-\left(\frac{2+\lambda}{2}\right)^2=0 \iff \lambda=0 \text{ ó } \lambda=-4$$

Si $\lambda=0$ la cónica queda $(x+y-3)(x+y-8)=0$ que claramente es degenerada (producto de dos rectas) y por tanto no es una parábola.

Si $\lambda=-4$ queda:

$$x^2-2xy+y^2+x-3y=0$$

La matriz A de la cónica es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene determinante no nulo y por tanto es la parábola pedida.

(1.3 puntos)

8.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

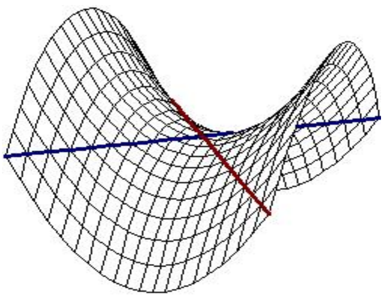
$$x^2-y^2+z^2-2xy-2xz+2yz-4x+8y+6z+4=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

Para clasificar la cuádrica diagonalizamos por congruencia su matriz asociada teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser cambiada de posición, ni multiplicada por un número ni sumada a otra fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{H_{41}(2)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{41}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{42}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando con las restricciones que hemos indicado; la signatura de la matriz de términos cuadráticos es $(+,-,0)$ y se trata por tanto de un paraboloide hiperbólico.



(0.6 puntos)
