

1.— En el espacio afín se considera la recta r de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

y el punto $P = (3, 1, 1)$.

- (i) Calcular la ecuación implícita de todos los planos perpendiculares a r y que distan 1 unidad del punto P .
- (ii) Calcular la ecuación paramétrica de una recta que corte perpendicularmente a r y pasando por P .
- (iii) Calcular las ecuaciones cartesianas de la recta simétrica de r respecto al punto P .

(1.5 puntos)

2.— Sea el espacio vectorial euclideo \mathbb{R}^3 ; se considera una forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (i) ¿Para qué valores de a es f un producto escalar?
- (ii) Calcular a para que los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 3, -1)$ sean ortogonales respecto al producto escalar definido por f .
- (iii) Para $a = 4$ y con respecto al producto escalar que define f dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

(1.3 puntos)

3.— Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

- (i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en \mathbb{R}^3 ?
- (ii) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en \mathbb{R}^3 ?
- (iii) Si la matriz asociada a un giro en \mathbb{R}^3 tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?
- (iv) Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1, 2) = (-1, -2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?

(1.2 puntos)

4.— En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de 90° respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

(1.2 puntos)

5.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se dispone de la siguiente información:

- Los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$ son conjugados.

- $w(1, 0, 1) = 1$ y $w(0, 1, 0) = -1$.

- $\ker(f) = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$.

(i) Calcular la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la correspondiente forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iv) Hallar el conjunto de vectores autoconjugados, indicando si es posible los subespacios en los que se divide. Expresar los resultados respecto de la base canónica.

(1.3 puntos)

6.— En el plano afín se considera la familia de cónicas:

$$x^2 + 2axy + 2y^2 + 2x - 6ay + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(i) Clasificar la cónica en función del parámetro a .

(ii) Para $a = 1$ calcular el centro de la cónica.

(iii) Para $a = \sqrt{2}$ calcular la distancia entre el vértice y el foco.

(iv) ¿Para qué valores de a la excentricidad de la cónica es mayor que 1?

(1.6 puntos)

7.— Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que pasa por los puntos $P = (0, 3)$, $Q = (2, 6)$ y tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$.

(1.3 puntos)

8.— Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 4x + 8y + 6z + 4 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

1.— No espazo afín se considera a recta r de ecuacions:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

e o punto $P = (3, 1, 1)$.

- (i) Calcular a ecuación implícita de todos os planos perpendiculares a r e que distan 1 unidade do punto P .
- (ii) Calcular a ecuación paramétrica dunha recta que corte perpendicularmente a r e pasando por P .
- (iii) Calcular as ecuacions cartesianas da recta simétrica de r respecto ó punto P .

(1.5 puntos)

2.— Sexa o espazo vectorial euclideo \mathbb{R}^3 ; se considera unha forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuxa matriz asociada na base canónica é:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (i) Para qué valores de a é f un produto escalar?
- (ii) Calcular a para que os vectores $(1, 0, 1)$ e $(0, 3, -1)$ sexan ortogonais respecto ó produto escalar definido por f .
- (iii) Para $a = 4$ e con respecto ó produto escalar que define f dar unha base ortonormal e calcular o ángulo que forman os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

(1.3 puntos)

3.— Responde de maneira argumentada ás seguintes cuestións:

- (i) Cal é o valor máximo da traza dunha matriz asociada a unha transformación ortogonal en \mathbb{R}^3 ?
- (ii) Cal é o valor máximo da traza dunha matriz asociada a unha transformación ortogonal inversa en \mathbb{R}^3 ?
- (iii) Se a matriz asociada a un xiro en \mathbb{R}^3 ten traza cero. Cales son os posibles valores do ángulo de xiro?
- (iv) Se f é una simetría do plano co produto escalar usual e $f(1, 2) = (-1, -2)$. Cal é o eixo de simetría?

(1.2 puntos)

4.— No espazo afín calcular as ecuacions dun xiro de 90° respecto á semirecta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

(1.2 puntos)

5.— Sexa $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha forma bilineal simétrica e w a súa forma cuadrática asociada. Se dispón da seguinte información:

- Os vectores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ son conxugados.

- $w(1, 0, 1) = 1$ e $w(0, 1, 0) = -1$.

- $\ker(f) = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$.

- (i) Calcular a matriz asociada a w respecto da base canónica.
- (ii) Clasificar a correspondente forma cuadrática indicando ademais o seu rango e signatura.
- (iii) Atopar unha base de vectores conxugados.
- (iv) Atopar o conxunto de vectores autoconxugados, indicando se é posible os subespazos nos que se divide. Expresar os resultados respecto da base canónica.

(1.3 puntos)

6.— No plano afín se considera a familia de cónicas:

$$x^2 + 2axy + 2y^2 + 2x - 6ay + 1 = 0, \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (i) Clasificar a cónica en función do parámetro a .
- (ii) Para $a = 1$ calcular o centro da cónica.
- (iii) Para $a = \sqrt{2}$ calcular a distancia entre o vértice e o foco.
- (iv) Para que valores de a a excentricidade da cónica é maior que 1?

(1.6 puntos)

7.— Atopar a ecuación dunha parábola sabendo que pasa polos puntos $P = (0, 3)$, $Q = (2, 6)$ e ten por eixo a recta $x - y + 1 = 0$.

(1.3 puntos)

8.— Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 4x + 8y + 6z + 4 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)