Álgebra Lineal II		**Soluciones del Examen Final**
Ejercicio único	(3 horas)	**11 de julio de 2016**

1.– *En $\mathbb{R}^3$ y dados $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la forma bilineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + axy' + xz' + ayx' + yy' + yz' + bzx' + zy' + 2zz'$$

(i) *¿Para qué valores de a y b es f una forma bilineal simétrica?.*

La matriz asociada respecto de la base canónica, trasladando coeficientes, es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que la forma bilineal sea simétrica equivale a que la matriz asociada sea simétrica. Esto ocurre cuando $b = 1$ y a toma cualquier valor.

(ii) *Para los valores determinados en el apartado anterior clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.*

Para $b = 1$ clasificamos la forma cuadrática diagonalizando su matriz asociada por congruencia:

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-a)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(a-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(a-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a(1-a) \end{pmatrix}$$

Dado que $2a(1-a)$ se anula para $a = 0$ y $a = 1$ distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 0$ la signatura es $(2,1)$ y el rango 3. Es no degenerada e indefinida.

- Si $a = 0$ la signatura es $(2,0)$ y el rango 2. Es degenerada y semidefinida positiva.

- Si $0 < a < 1$ la signatura es $(3,0)$ y el rango 3. Es no degenerada y definida positiva.

- Si $a = 1$ la signatura es $(2,0)$ y el rango 2. Es degenerada y semidefinida positiva.

- Si $a > 1$ la signatura es $(2,1)$ y el rango 3. Es no degenerada e indefinida.

(iii) *Para $a = 0$ y $b = 1$ determinar los vectores autoconjugados.*

Para $a = 0$ y $b = 1$ es una forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Por tanto los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + z = 0, \quad y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0.$$

La última ecuación es suma de las otras dos; por tanto nos quedan dos ecuaciones implícitas independientes.

$$x + z = 0, \quad y + z = 0.$$

Resolviendo obtenemos las paramétricas:

$$x = \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -\lambda$$

Por lo que:

$$Autoconjug(f) = ker(f) = \mathcal{L}\{(1, 1, -1)\}.$$

(iv) *Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cuál la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal. Entonces basta aplicar las mismas operaciones fila que hicimos en la diagonalización en (ii) sobre la identidad, para obtener una matriz cuyas filas son las coordenadas de la base buscada respecto de la base canónica:

$$Id \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base pedida es:

$$\{(1, 0, 0), (-1, 0, 1), (-3, 1, 1)\}$$

(v) *Para $a = 1$ y $b = 0$ hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB}$$

donde:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$F_B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.7 puntos)

2.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1, 1, 1)$ sobre el subespacio U?.

Calculamos primero el generador de U (tiene dimensión 1 porque está definido en $\mathbb{R}^3$ por dos ecuaciones implícitas independientes). Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$x = 0, \quad y = -2z$$

obteniendo las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = -2a, \quad z = a$$

de donde $U = \mathcal{L}\{(0, -2, 1)\}$

Calculamos ahora una base de $U^\perp$; es decir calculamos los vectores (x, y, z) ortogonales a $(0, -2, 1)$:

$$(x, y, z) \cdot (0, -2, 1) = 0 \iff (\, x \quad y \quad z \,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff z = 0.$$

Por tanto $U^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Formamos una base con los generadores de U y $U^{\perp}$:

$$B = \{\underbrace{(0,-2,1)}_{U}, \underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{U^{\perp}}\}$$

En tal base la matriz de la proyección ortogonal sobre U es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio U es:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

3.– *Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Conocida la traza de la matriz asociada a una transformación otogonal en el plano se puede determinarse si es un giro o una simetría.*

FALSO. Las matrices $\begin{pmatrix} cos(90^o) & -sin(90^0) \\ sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tienen ambas traza cero, pero la primera es un giro y la segunda es una simetría.

(ii) *En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a un plano puede ser una simetría respecto a una recta.*

FALSO. En el espacio una transformación ortogonal:

- es un giro si y sólo si es directa, es decir, su determinante es 1.

- es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano si y sólo si es inversa, es decir, su determinante es -1.

La composición de un giro con una simetría respecto a una recta da por tanto una matriz con determinantes $1 \cdot (-1) = (-1)$ y será un giro compuesto con una simetría respecto a un plano. Pero una simetría respecto a una recta, es un giro de 180^o respecto a esa recta, por tanto no puede corresponder a la composición anterior.

(iii) *En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a una recta siempre es un giro.*

VERDADERO. Una simetría respecto a una recta es un giro de 180^o respecto a esa recta; por tanto estamos componiendo dos giros. Razonando como en (ii) la composición tiene determinante $1 \cdot 1 = 1$, es decir, vuelve a ser un giro.

(iv) *Si la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio es* 3*, entonces es una simetría respecto al origen.*

FALSO. Si la matriz es la identidad, la traza es 3 y NO es una simetría respecto al origen.

(1.2 puntos)

4.– *En el espacio afín hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto* $(1,-1,1)$ *en* $(1,1,3)$.

El plano de simetría tiene que pasar por el punto medio del punto original con su simétrico:

$$M = \frac{(1,-1,1)+(1,1,3)}{2} = (1,0,2)$$

Además su vector normal es el vector que une el punto origen y su imagen:

$$(1,1,3)-(1,-1,1) = (0,2,2)$$

El plano de simetría es de la forma:

$$2y+2z+d=0$$

Imponemos que pase por $M=(1,0,2)$:

$$2\cdot 0+2\cdot 2+d=0 \Rightarrow d=-4$$

El plano queda:

$$2y+2z-4=0 \iff y+z-2=0.$$

La ecuación de la simetría respecto a este plano:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -4\end{pmatrix} + S_C\begin{pmatrix} x-0\\ y-2\\ z+4\end{pmatrix}$$

donde S_C es la matriz de la simetría respecto al subespacio:

$$U=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(0,1,1)=0\} = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,-1)\}.$$

En la base:

$$B=\{\underbrace{(1,0,0),(0,1,-1)}_{U},\underbrace{(0,1,1)}_{U^{\perp}}\}.$$

la matriz de la simetría es:

$$S_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$S_C = M_{CB}S_BM_{CB}^{-1}, \quad \text{con} \quad M_{CB}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Obtenemos:

$$S_C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

y así:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -4\end{pmatrix} + S_C\begin{pmatrix} x-0\\ y-2\\ z+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ 2-z\\ 2-y\end{pmatrix}$$

(1 punto)

5.– *En el espacio afín sean los puntos* $A(1,1,0)$ *y* $B(0,1,1)$.

a) *Calcular las coordenadas de un tercer punto* C *en el plano de ecuación* $x+z=2$ *de manera que el triángulo* ABC *sea equilátero. ¿Es única la solución?.*

Sea $C=(a,b,c)$. Por estar en el plano $x+z=2$ se cumple $a+c=2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} d(A,B)=d(A,C) &\iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2} \iff \\ &\iff 2=(1-a)^2+(1-b)^2+c^2 \\ d(A,B)=d(B,C) &\iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2} \iff \\ &\iff 2=a^2+(1-b)^2+(1-c)^2 \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0=1-2a-1+2c \iff a=c$$

Como además $a+c=2$ obtenemos $a=c=1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2=(1-1)^2+(1-b)^2+1^2 \iff (1-b)^2=1 \iff b=0 \text{ ó } b=2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C=(1,0,1) \text{ ó } C=(1,2,1).$$

b) *Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.*

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V=\frac{1}{6}|det(OA,OB,OC)|$$

Cuando $C=(1,0,1)$ queda:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{3}.$$

Cuando $C=(1,2,1)$:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\right\|=0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contendio en el mismo plano que la base.)

(1 punto)

6.– *Dada la cónica de ecuación*

$$x^2-2xy+y^2+x-3y=0$$

a) *Clasificarla y hallar su ecuación reducida.*

La matriz asociada y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\-1&1&-3/2\\1/2&-3/2&0\end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Vemos que $|T| = 0$ y $|A| = -1$: se trata de una parábola.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 - 2cy'' = 0$$

donde λ_1 es el autovalor de T no nulo y $c = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}}$.

Calculamos los autovalores de T como las raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

Resultan $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$. Entonces $c = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}} = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La ecuación reducida queda:

$$2x''^2 - \sqrt{2}y'' = 0$$

o también:

$$x''^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} y''$$

donde el parámetro p de la parábola es $p = \sqrt{2}/4$.

b) *Hallar sus ejes, focos y excentricidad.*

El eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo. Calculamos tal autovector:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

El eje será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 2 = 0 \iff x - y + 1 = 0.$$

La excentricidad es 1 por tratarse de una parábola.

El foco de la parábola en su forma reducida (es decir, en el nuevo sistema de referencia R') es: $F = (0, p/2)_{R'} = (0, \sqrt{2}/8)_{R'}$.

Lo tenemos que pasar a la referencia canónica mediante las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

donde (n, m) es el vértice de la parábola y P la matriz de autovectores de T normalizados.

Vimos que $\vec{v}_1 = (1, -1)$ era el autovector asociado al 2. El asociado al 0 es perpendicular $\vec{v}_2$, por lo que podemos tomar $\vec{v}_2 = (1, 1)$ o $\vec{v}_1 = (-1, -1)$. Decidimos cuál de los dos se escoge con el criterio $\vec{v}_2 \cdot (a_{13}, a_{23}) < 0$. Lo cumple $\vec{v}_2 = (1, 1)$:

$$(1, 1) \cdot (1/2, -3/2) = -1 < 0$$

Normalizamos los autovectores:

$$\frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \quad \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),$$

La matriz P es:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El vértice es la intersección del eje con la cónica, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y \\ 0 = x - y + 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación $y = x + 1$. Sustituyendo en la primera:

$$x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 + x - 3(x+1) = 0 \iff -2x - 2 = 0 \iff x = -1.$$

El vértice es $V = (-1, -1+1) = (-1, 0)$.

La ecuación de cambio de referencia queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Y finalmente el foco:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

c) *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(0, -1)$.

La recta polar del punto $P = (0, -1)$ corta a la cónica en los puntos de tangencia de las tangentes exteriores a la misma por P.

Calculemos tal recta polar:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \iff 3x - 5y + 3 = 0.$$

Intersecamos con la cónica:

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y = 0 \\ 0 = 3x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación $x = \frac{5}{3}y - 1$. Sustituyendo en la primera y simplificiando queda:

$$4y^2 - 24 = 0 \iff 4y(y-6) = 0$$

Obtenemos los puntos de corte $Q = (-1, 0)$ y $R = (9, 6)$.

Finalmente las tangentes son las rectas QP y RP.

Recta QP:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y+1}{0+1} \iff x + y + 1 = 0$$

Recta RP:

$$\frac{x-0}{9-0} = \frac{y+1}{6+1} \iff 7 - 9y - 9 = 0$$

(2 puntos)

7.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2y + 2z + 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

La matriz asociada a la cuádrica es:

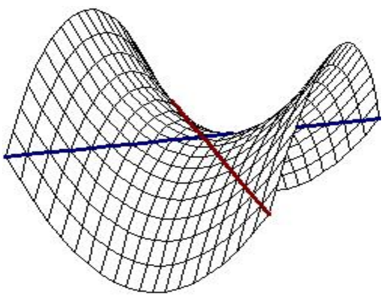
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{H_{42}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin utilizar de manera indebida la cuarta fila. El tipo de cuádrica queda determinando en ese caso por la signatura de la matriz 3×3 de términos cuadráticos: $(+, -, 0)$. Se trata de un paraboloide hiperbólico.



8.– *Hallar la ecuación de una elipse de centro el origen, que tiene por foco el punto* $F(1, 1)$ *y pasa por el punto* $(1, -1)$

Dado que el centro de la cónica es un centro de simetría de la misma el simétrico F' de F respecto del origen será el otro foco; equivalentemente el origen es el punto medio de los dos focos:

$$(0, 0) = \frac{(1, 1) + F'}{2} \iff F' = (-1, -1)$$

Ahora usamos la caracterización de la elipse como caracterización geométrica, es decir, como conjunto de puntos cuya suma de distancias a los focos es constante:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = k$$

Para hallar la constante k imponemos que la cónica pase por el punto $(x, y) = (1, -1)$:

$$k = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2} + \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 4.$$

La ecuación queda:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=4.$$

Sólo resta operar para simplificar la expresión.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\\
&(x-1)^2+(y-1)^2=4^2+(x+1)^2+(y+1)^2-8\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\\
&x^2-2x+1-y^2-2y+1=16+x^2+2x+1+y^2+2y+1-8\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\\
&8\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=4x+4y+16\\
&2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=x+y+4\\
&4(x^2+2x+1+y^2+2y+1)=x^2+y^2+16+2xy+8x+8y\\
&3x^2-2xy+3y^2-8=0.
\end{aligned}$$

(1.5 puntos)