# Álgebra Lineal II — Examen Final

**Ejercicio único** (3 horas) **11 de julio de 2016**

**1.–** En $\mathbb{R}^3$ y dados $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + axy' + xz' + ayx' + yy' + yz' + bzx' + zy' + 2zz'$$

(i) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ es $f$ una forma bilineal simétrica?.

(ii) Para los valores determinados en el apartado anterior clasificar la forma cuadrática asociada a $f$ indicando además su rango y signatura.

(iii) Para $a = 0$ y $b = 1$ determinar los vectores autoconjugados.

(iv) Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.

(v) Para $a = 1$ y $b = 0$ hallar la matriz asociada a $f$ respecto de la base $B = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$.

(1.7 puntos)

---

**2.–** En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio $U$?.

(1 punto)

---

**3.–** Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) Conocida la traza de la matriz asociada a una transformación otogonal en el plano se puede determinarse si es un giro o una simetría.

(ii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a un plano puede ser una simetría respecto a una recta.

(iii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a una recta siempre es un giro.

(iv) Si la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio es 3, entonces es una simetría respecto al origen.

(1.2 puntos)

---

**4.–** En el espacio afín hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(1,-1,1)$ en $(1,1,3)$.

(1 punto)

---

**5.–** En el espacio afín sean los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,1,1)$.

a) Calcular las coordenadas de un tercer punto $C$ en el plano de ecuación $x+z=2$ de manera que el triángulo $ABC$ sea equilátero. ¿Es única la solución?.

b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

(1 punto)

---

**6.–** Dada la cónica de ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y = 0$$

a) Clasificarla y hallar su ecuación reducida.

b) Hallar sus ejes, focos y excentricidad.

c) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(0,-1)$.

(2 puntos)

---

**7.–** Dada la cuádrica de ecuación:

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2y + 2z + 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

---

**8.–** Hallar la ecuación de una elipse de centro el origen, que tiene por foco el punto $F(1,1)$ y pasa por el punto $(1,-1)$

(1.5 puntos)

---

# Álxebra Lineal II — Exame Final

**Exercicio único** (3 horas.) **11 de Xulio de 2016**

**1.–** En $\mathbb{R}^3$ e dados $a, b \in \mathbb{R}$ se considera a forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + axy' + xz' + ayx' + yy' + yz' + bzx' + zy' + 2zz'$$

(i) Para que valores de $a$ e $b$ é $f$ unha forma bilineal simétrica?.

(ii) Para os valores determinados no apartado anterior clasificar a forma cuadrática asociada a $f$ indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Para $a = 0$ e $b = 1$ determinar os vectores autoconxugados.

(iv) Para $a = 2$ dar unha base de vectores conxugados.

(v) Para $a = 1$ e $b = 0$ atopar a matriz asociada a $f$ respecto da base $B = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$.

(1.7 puntos)

---

**2.–** No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera o producto escalar dado pola matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto da base canónica, a matriz asociada á aplicación proxección ortogonal sobre o subespazo:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

Cal é a proxección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre o subespazo $U$?.

(1 punto)

---

**3.–** Razoar a falsedade ou veracidade das seguintes afirmacions:

(i) Conocida a traza da matriz asociada a unha transformación ortogonal no plano se pode determinar se é un xiro ou unha simetría.

(ii) No espazo, a composición dun xiro con unha simetría respecto a un plano pode ser unha simetría respecto a unha recta.

(iii) No espazo, a composición dun xiro con unha simetría respecto a una recta sempre é un xiro.

(iv) Se a traza da matriz asociada a unha transformación ortogonal no espazo é 3, entonces é unha simetría respecto á orixe.

(1.2 puntos)

---

**4.–** No espazo afín atopar as ecuacions dunha simetría respecto a un plano que leve o punto $(1,-1,1)$ en $(1,1,3)$.

(1 punto)

---

**5.–** No espazo afín sexan os puntos $A(1,1,0)$ e $B(0,1,1)$.

a) Calcular as coordenadas dun terceiro punto $C$ no plano de ecuación $x+z=2$ de manera que o triángulo $ABC$ sexa equilátero. É única a solución?.

b) Para cada unha das soluciones do apartado anterior, atopar o volume da pirámide que ten por base o triángulo e coma carto vértice a orixe.

(1 punto)

---

**6.–** Dada a cónica de ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y = 0$$

a) Clasificala e atopar a súa ecuación reducida.

b) Atopar os seus eixos, focos e excentricidade.

c) Calcular as ecuacions das rectas tanxentes á cónica que pasan polo punto $(0,-1)$.

(2 puntos)

---

**7.–** Dada a cuádrica de ecuación:

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2y + 2z + 1 = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)

---

**8.–** Atopar a ecuación dunha elipse de centro a orixe, que ten por foco o punto $F(1,1)$ e pasa polo punto $(1,-1)$

(1.5 puntos)

---