Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Geometría afín. (45 minutos) **18 de abril de 2017**

1.– *En el plano afín y en las condiciones usuales calcular la ecuación de una simetría respecto a una recta que lleve el punto $A=(1,3)$ en el punto $B=(-1,1)$.*

El eje de simetría es perpendicular al vector que une un punto y su simétrcio, es decir, perpendicular al vector:

$$\vec{A}B = B - A = (-1,1)-(1,3) = (-2,-2).$$

Por tanto ese es su vector normal y así la ecuación del eje es de la forma:

$$-2x-2y+c=0.$$

Además pasa por el punto medio de ambos:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{(1,3)+(-1,1)}{2} = (0,2).$$

Imponiendo que pase por tal punto:

$$-2\cdot 0 - 2\cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = 4.$$

El eje queda:

$$-2x-2y+4=0 \iff x+y-2=0.$$

Ahora la ecuación de la simetría es de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

donde (a,b) es un punto fijo de la simetría, es decir, un punto del eje y T_C la matriz de la simetría respecto al subespacio generado por el vector director del eje.

Podemos tomar $(a,b)=(0,2)$.

Para hallar T_C notamos que el vector normal del eje es $(1,1)$ y por tanto su vector director $(1,-1)$. Consideramos la base:

$$B = \{\underbrace{(1,-1)}_{eje}, \underbrace{(1,1)}_{eje^{\perp}}\}$$

respecto a la cuál la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el cambio de base:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la simetría quedan:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$f(x,y) = (2-y, 2-x).$$

2.– *En el espacio afín se consideran las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (2,1,1) + \lambda(1,1,0)$$

(i) Hallar la ecuación de una recta l cortando a ambas rectas y perpendicular a ellas.

Método I: Hallaremos un punto de cada recta de manera que el vector que los une sea perpendicular a ambas. La recta buscada será la que une esos dos puntos.

Un punto P genérico de la recta r es:

$$P = (1,2,2) + t(1,1,1).$$

y un punto Q genérico de la recta s es:

$$Q = (2,1,1) + \lambda(1,1,0).$$

Imponemos que el vector $\vec{P}Q$ que los une sea perpendicular a ambas rectas, es decir, a sus vectores directores $\vec{u}_r = (1,1,1)$ y $\vec{u}_s = (1,1,0)$:

$$\vec{P}Q = Q - P = (1+\lambda-t, -1+\lambda-t, -1-t)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{P}Q \cdot \vec{u}_r = 0 &\iff 1+\lambda-t-1+\lambda-t-1-t = 0 \iff 2\lambda - 3t - 1 = 0. \\ \vec{P}Q \cdot \vec{u}_s = 0 &\iff 1+\lambda-t-1+\lambda-t = 0 \iff 2\lambda - 2t = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtemos $t = -1$ y $\lambda = -1$.

La recta buscada es la que une los puntos P y Q:

$$P = (1,2,2) + (-1)(1,1,1) = (0,1,1).$$

y

$$Q = (2,1,1) + (-1)(1,1,0) = (1,0,1).$$

La recta es:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-1}{1-1}$$

Simplificando:

$$x + y = 1, \qquad z = 1.$$

Método II: Sea $\vec{v}$ el producto vectorial de los vectores directos de las rectas r y s. Es un vector perpendicular a ambas.

La recta buscada puede obtenerse como intersección de dos planos: el que contiene a la recta r y a $\vec{v}$ y el que contiene a la recta s y al vector $\vec{v}$.

Tenemos:

$$\vec{v} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (1,1,1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1,1,0).$$

El plano que contiene a r y a $\vec{v}$, pasa por el punto $(1,2,2)$ y tiene como vectores directores $(1,1,1)$ y $(-1,1,0)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y - 2z + 1 = 0.$$

El plano que contiene a s y a $\vec{v}$, pasa por el punto $(2,1,1)$ y tiene como vectores directores $(1,1,0)$ y $(-1,1,0)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff z = 1.$$

La recta buscada es:

$$x + y - 2z + 1 = 0, \qquad z = 1.$$

(ii) *Hallar la distancia entre r y s.*

La distancia entre ambas rectas es la distancia entre los puntos P y Q calculados en el apartado anterior:

$$d(P,Q) = \|\vec{P}Q\| = \|(1,0,1) - (0,1,1)\| = \|(1,-1,0)\| = \sqrt{2}.$$

También podría aplicarse la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|det(\vec{A}B, \vec{u}_r, \vec{u}_s)|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$

con

$$A = (1,2,2), \quad B = (2,1,1), \quad \vec{u}_r = (1,1,1), \quad \vec{u}_s = (-1,1,0).$$

3.– *En el espacio afín dados los puntos $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (1,1,0)$, calcular el área del triángulo que forman.*

El área es:

$$\frac{1}{2}\|\vec{A}B \times \vec{A}C\| = \frac{1}{2}\|(1,0,1) \times (1,1,0)\| = \frac{1}{2}\|(-1,1,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

donde:

$$(1,0,1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-1,1,1).$$
