

1.— En el espacio afín E_3 consideramos un triángulo de vértices A, B, C ,

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 0, 0), \quad C = (2, 4, 6).$$

(i) Calcular el área y perímetro del triángulo.

El área puede calcularse como:

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

donde

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$$

Queda:

$$S = \frac{1}{2} \|(0, 12, 8)\| = 2\|(0, 3, 2)\| = 2\sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}.$$

El perímetro es la suma de las longitudes de los tres lados:

$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| + \|\vec{BC}\| = \|(2, 0, 0)\| + \|(2, 4, 6)\| + \|(0, 4, 6)\| = 2 + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{13}.$$

(ii) Calcular la ecuación de las rectas que contienen a las alturas del triángulo.

Las alturas son las rectas que pasan por cada vértice y son perpendiculares al lado opuesto.

Las calcularemos como intersección del plano que contiene al triángulo y los planos perpendiculares a cada lado y pasando por el vértice opuesto.

El plano que contiene a A, B, C tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2-0 & 4-0 & 6-0 \end{vmatrix} = 0 \iff 3y - 2z = 0.$$

Para hallar los planos perpendiculares a los lados pasando por el vértice opuesto usaremos que la ecuación de un plano con vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ y pasando por (x_0, y_0, z_0) es:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Hallamos ahora el plano perpendicular a $\vec{AB}$ y pasando por $C = (2, 4, 6)$. Su vector normal será precisamente $\vec{AB} = (2, 0, 0)$ y por tanto el plano es:

$$2 \cdot (x - 2) + 0 \cdot (y - 4) + 0 \cdot (z - 6) = 0 \iff x - 2 = 0.$$

Análogamente el plano perpendicular a $\vec{AC}$ y pasando por $B = (2, 0, 0)$ es:

$$2 \cdot (x - 2) + 4 \cdot (y - 0) + 6 \cdot (z - 0) = 0 \iff x + 2y + 3z - 2 = 0.$$

y finalmente el plano perpendicular a $\vec{BC}$ y pasando por $A = (0, 0, 0)$ es:

$$0 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 0) = 0 \iff 2y + 3z = 0.$$

Concluimos que las tres alturas son:

$$h_{AB} \equiv \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad h_{AC} \equiv \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad h_{BC} \equiv \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

(5 puntos)

- 2.**— En el espacio afín E_2 calcular las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que lleve el punto $(2, 4)$ en el punto $(5, 1)$. Hallar la ecuación del simétrico de la recta $x - 2y + 3 = 0$ por la transformación anterior.

El eje de simetría es la mediatriz de un punto y su imagen.

La mediatriz de $A = (2, 4)$ y $A' = (5, 1)$ pasa por su punto medio:

$$M = \frac{A + A'}{2} = (7/2, 5/2)$$

Es perpendicular además al vector $\vec{AA'} = (3, -3)$; por tanto tiene por ecuación:

$$3(x - 7/2) - 3(y - 5/2) = 0$$

Simplificando:

$$x - y - 1 = 0.$$

Se trata por tanto calcular la ecuación de la simetría respecto a la recta $x - y - 1 = 0$. Para ello tomamos un punto fijo de la misma, del eje, por ejemplo $(1, 0)$. La ecuación será:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}$$

donde S es la matriz de la simetría respecto al subespacio generado por el vector director del eje $\{(1, 1)\}$. Para calcular esa matriz consideramos la base ortogonal $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. En tal base la matriz de la simetría es:

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos de base a la canónica:

$$S_C = M_{CB} S_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simetría queda:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y \\ x - 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir si denotamos por (x', y') las coordenadas del simétrico de un punto (x, y) son:

$$x' = 1 + y, \quad y' = x - 1.$$

Para hallar el simétrico de la recta $x - 2y + 3 = 0$ de las ecuaciones anteriores deducimos la expresión de las coordenadas del punto de partida en función del simétrico:

$$x = y' + 1, \quad y = x' - 1.$$

Por tanto el simétrico de la recta dada está definido por la ecuación:

$$(y' + 1) - 2(x' - 1) + 3 = 0 \iff y' - 2x' + 6 = 0.$$

(5 puntos)