Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **25 de febrero de 2015**

1.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x,y,z) = ax^2 + y^2 + 4xy + 2axz.$$

(i) Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.

Para clasificarla estudiamos su rango y signatura. Para ello diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 4$ continuamos:

$$\xrightarrow{H_{32}(-a/(a-4))} \xrightarrow{\mu_{32}(-a/(a-4))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/(a-4) \end{pmatrix}$$

Si $a = 4$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)} \xrightarrow{\mu_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal se anulan cuando $a = 4$ ó $a = 0$. Por tanto distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 0$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 0$ la signatura es $(1,1)$ y su rango es 2. La forma cuadrática es indefinida y degenerada.

- Si $0 < a < 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a > 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

En resumen: la forma cuadrática es siempre indefinida. Es no degenerada excepto si $a = 0$.

(ii) *Para $a = 0$ hallar los vectores autoconjugados, expresándolos si es posible como unión de dos planos.*

Por definición los vectores autoconjugados son aquellos cuya imagen por la forma cuadrática es nula. Dado que la forma cuadrática para $a = 0$ es indefinida y tiene rango 2 los vectores autoconjugados pueden descomponerse en unión de dos planos:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | w(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + 4xy = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y(y+4x) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y + 4x = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\} \cup \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-4,0)\} \end{aligned}$$

(5 puntos)

2.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si w es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de rango 1 entonces no puede ser indefinida.*

VERDADERO. Si es de rango 1 y en $\mathbb{R}^2$ entonces en la forma diagonalizada necesariamente aparece un cero y otro elemento no nulo. Por tanto en ningún caso pueden aparecer dos números de diferentes signo y no puede ser indefinida.

(ii) *Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$ entonces w es semidefinida positiva.*

FALSO. Por ejemplo si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cumple que $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$. Pero su determinante es no nulo, por tanto no puede ser semidefinida.

(iii) *Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = -1$ entonces w es indefinida.*

VERDADERO. Si A es la matriz asociada en una determinada base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y f es la forma bilineal simétrica asociada a w, entonces $1 = a_{11} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1) > 0$ y $-1 = a_{33} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1) < 0$. Por tanto es indefinida, ya que hay que vectores sobre las cuáles la forma cuadrática toma valores positivos y otros sobre los cuales toma valores negativos.

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.*

VERDADERO. Son matrices asociadas a una misma forma cuadrática precisamente si tienen la misma signatura. Para comprobarlo las diagonalizamos por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vemos que ambas tienen signatura $(1, 1)$. Por tanto son congruentes y corresponde a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.

(v) *Si $A \in \mathcal{M}_{2015\times 2015}(\mathbb{R})$ es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces $det(A) < 0$.*

FALSO. De hecho por ser semidefinida en la forma diagonal siempre aparece algún cero. El rango de la forma cuadrática no es máximo y así el determinante de cualquier matriz asociada es nulo (y NO menor que cero).

(5 puntos)