Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **25 de mayo de 2015**

1.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica cuya expresión el la base B formada por los vectores $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}$ es:*

$$f((x_1,x_2,x_3)_B,(y_1,y_2,y_3)_B) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3.$$

Sea w la forma cuadrática asociada a f.

(i) *Calcular la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

En la base B la matriz asociada a la forma bilineal dada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para hallar matriz asociada en la base canónica hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la correspondiente forma cuadrática indicando además su rango y signatura.*

Diagonalizamos por congruencia la matriz asociada:

$$F_B \overset{H_{21}(2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene signatura $(2,1)$ y por tanto rango 3. Es no degenerada e indefinida.

(iii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cuál la matriz asociada es diagonal; teniendo en cuenta que en el apartado anterior hemos diagonalizado por congruencia la matriz asociada a f respecto de la base B, haciendo sobre la identidad las mismas operaciones fila obtendremos una matriz cuyas filas son las coordenadas en la base B de una base de vectores conjugados:

$$Id \overset{H_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B' = \{(1,0,0)_B, (2,1,0)_B, (0,0,1)_B\}.$$

Pasamos esos vectores a la canónica multiplicándolos por la matriz de cambio de base M_{CB} y obtenemos:

$$B' = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,0,2)\}.$$

(iv) *Hallar un vector no nulo autoconjugado.*

Dado que el término a_{33} de la matriz asociada en la base canónica es 0, el vector $(0,0,1)$ cumple que $f((0,0,1),(0,0,1)) = 0$ y por tanto es no nulo y autoconjugado.

(v) *Calcular* $w(1,1,0)$.

Se tiene que:

$$w(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.$$

(1.3 puntos)

2.– *Sea el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con un producto escalar* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se sabe que* $\|(2,3,1)\| = 3$. *Además los vectores* $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ *tienen la misma norma y forman una base ortogonal.*

(i) *Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica del producto escalar dado.*

Dado que la matriz dada es ortogonal, la matriz de Gram en esa base es diagonal. Además por definici´on de matriz de Gramm en una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ los elementos de la diagonal de la matriz son:

$$g_{ii} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \|\vec{u}_i\|^2$$

es decir la norma de los vectores de la base al cuadrado. Dado que todos los vectores de la base indicada tienen la misma norma concluimos que:

$$G_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ahora usamos que $\|(2,3,1)\| = 3$. Primero lo expresamos en la base B:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{BC}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$9 = 3^2 = \|(2,3,1)\|^2 = \|(1,1,1)_B\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3a$$

de donde $a = 3$.

Finalmente hacemos un cambio de base a la base canónica:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = (M_{CB}^{-1})^t G_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Calcular el ángulo que forman los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(0,0,1)$.

Se tiene que:

$$cos(ang((1,0,0),(0,0,1)) = \frac{(1,0,0) \cdot (0,0,1)}{\|(1,0,0)\| \|(0,0,1)\|}$$

donde:

$$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3.$$

y

$$\|(1,0,0)\|^2 = (\,1 \quad 0 \quad 0\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6.$$

$$\|(0,0,1)\|^2 = (\,0 \quad 0 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

y

$$cos(ang((1,0,0),(0,0,1)) = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow ang((1,0,0),(0,0,1)) = arcos(-1/2) = 3\pi/2.$$

(iii) *Dar una base ortonormal.*

La base dada en el enunciado es ortogonal. Basta dividir cada vector de la misma por su norma para que sea ortonormal. Por lo razonado en (1) la norma de sus vectores es $\sqrt{a} = \sqrt{3}$. La base ortonormal queda entonces:

$$\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1/\sqrt{3}, 0)\}$$

(1.4 puntos)

3.– *En el espacio afín E_3 calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $A = (1,0,1)$ en $A' = (1,2,1)$. Hallar el simétrico del plano $x+y+z=0$ respecto de la simetría anterior.*

El plano de simetría es perpendicular al vector que une un punto y su siméttrico y contiene a su punto medio.

Por tanto el vector normal del plano pedido es:

$$\vec{n} = A' - A = (1,2,1) - (1,0,1) = (0,2,0).$$

El plano es de la forma $2y + c = 0$. Imponemos que pase por el punto medio $M = (A + A')/2 = (0,1,0)$:

$$2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2.$$

Por tanto el plano de simetría es:

$$2y - 2 = 0 \iff y - 1 = 0.$$

Las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F_C \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 0 \end{pmatrix}$$

donde F es la matriz de la simetría respecto al plano $y = 0$ e $(0,1,0)$ es un punto del plano de simetría.

Para hallar la matriz F_C hallamos una base ortogonal formada por los generadores del plano y un tercer perpendicular a él:

$$B = \{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$$

La matriz de la simetría en esta base es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiando a la base canónica queda:

$$F_C = M_{CB} F_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la ecuación de la simetría queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2-y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir:

$$x' = x, \qquad y' = 2 - y, \qquad z' = z.$$

Para hallar el simétrico del plano $x + y + z = 0$ en las ecuaciones anteriores despejamos x, y, z y susituimos en el plano dado. Queda:

$$x' + (2 - y') + z' = 0 \iff x' - y' + z' + 2 = 0.$$

(1.3 puntos)

4.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base cañonica:*

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.*

La matriz define una transformación orgogonal si cumple:

$$TT^t = Id$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 3/5 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff a^2 + \frac{9}{25} = 1, \qquad ac + \frac{3}{5}b = 0, \qquad c^2 + b^2 = 1.$$

Despejando obtenemos:

$$a = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Y de la segunda ecuación:

$$c = \mp\frac{3}{4}b.$$

Sustituyendo en la tercera:

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow b = \pm\frac{4}{5}.$$

Por tanto hay cuatro casos:

Caso I: $a = 4/5$, $b = 4/5$, $c = -3/5$.

Caso II: $a = 4/5$, $b = -4/5$, $c = 3/5$.

Caso III: $a = -4/5$, $b = 4/5$, $c = 3/5$.

Caso IV: $a = -4/5$, $b = -4/5$, $c = -3/5$.

(ii) *Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.*

El tipo de transformación depende del determinante de la matriz. Si $|T| = 1$ entonces es un giro; si $|T| = -1$ entonces es una simetría respecto a una recta.

Si es un giro de ánuglo α la matriz asociada respecto a la base canónica necesariamente tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Si es una simetría el eje de simetría es el autovector de T asociadao al 1.

Tenemos que $|T| = ab - \frac{3}{5}c$.

Caso I. $|T| = 1$. Se trata de un giro. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto $cos(\alpha) = 4/5$ y $sin(\alpha) = -3/5$. El ángulo de giro es $-arcos(4/5)$.

Caso II. $|T| = -1$. Es una simetría. El eje de simetría está generado por el autovector de T asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 3y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(3, 1)\}.$$

Caso III. $|T| = -1$. Es una simetría. El eje de simetría está generado por el autovector de T asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -9x + 3y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 3)\}.$$

Caso IV. $|T| = 1$. Se trata de un giro. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

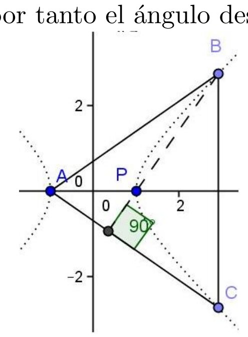
Por tanto $cos(\alpha) = -4/5$ y $sin(\alpha) = -3/5$. El ángulo de giro es $-arcos(-4/5)$.

(1.4 puntos)

5.– *En el plano afín sean los puntos $A(-1, 0)$ y $P(1, 0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.+*

Hay dos posibles interpretaciones:

- Los lados iguales son AB y AC, y por tanto el ángulo desigual el A:



En un triángulo isósceles la recta que une el vértice del ángulo desigual con el ortocentro es un eje de simetría. En nuestro caso tal recta, la que une A y P, es el eje OX. Si B tiene coordenadas (x, y) su simétrico respecto al eje OX es el punto C, $(x, -y)$, de forma que los tres vértices del triángulo son ABC.

Para que P sea el ortocentro el lado AC ha de ser perpendicular a la altura de vértice B, es decir, al vecotr BP. Por tanto:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0$$

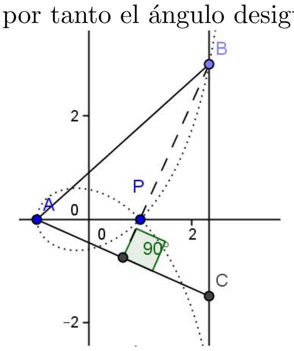
es decir:

$$(x - (-1), -y - 0) \cdot (1 - x, 0 - y) = 0 \iff (1 + x)(1 - x) + y^2 = 0 \iff x^2 - y^2 = 1$$

Vemos que la ecuación del lugar geométrico pedido corresponde a la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

- Los lados iguales son AB y BC y por tanto el ángulo desigual B:



La altura sobre el lado BC es la recta que une A con el ortocentro; por tanto BC es perpendicular al eje OX. Así si B tiene coordenadas (x, y) entonces C tiene coordenadas (x, y').

Dado que la distancia AB es la misma que BC:

$$(x + 1)^2 + y^2 = (y - y'^2) \quad \iff \quad (x + 1)^2 = y'^2 - 2yy'$$

Por otra parte la recta BP tiene que ser perpendicular la lado AB, es decir:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0 \iff (x - (-1), -y - 0) \cdot (1 - x, 0 - y') = 0 \iff (1 + x)(1 - x) + yy' = 0 \iff x^2 - 1 + yy' = 0$$

Despejando y' en la segunda ecuacin y sustiyuendo en la primera se tiene:

$$(x + 1)^2 = \frac{(1 - x^2)^2}{y^2} - 2(1 - x^2)$$

Dividiendo por $x + 1$:

$$(x + 1) = \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{y^2} + 2(x - 1)$$

Quitando denominadores y simplificando obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 - xy^2 - 3y^2 = 0,$$

que es la ecuación de una cúbica.

(1.1 puntos)

6.– *En el plano afín se considera la curva de ecuación:*

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica.*

Las matrices asociadas a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

y sus determinantes:

$$det(A) = 6 > 0, \qquad det(T) = -6 < 0.$$

Se trata por tanto de una hipérbola.

(ii) *Hallar su ecuación reducida y las ecuaciones de cambio de referencia.*

Para hallar la ecuación reducida comenzamos calculando los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Resolviendo obtenemos:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

(como $det(A) > 0$ colocamos primero el autovalor positivo). La eucación reducida será de la forma:

$$2x''^2 - 3y''^2 + c = 0 \text{ con } c = \frac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2} = -1.$$

Queda:

$$2x''^2 - 3y''^2 = 1$$

o equivalentemente:

$$\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{1/3} = 1.$$

La ecuación de cambio de referencia es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

donde (p, q) es el centro y M la matriz de autovectores de T normalizados.

Calculamos el centro (p, q):

$$(p, q, 1)A = (0, 0, h) \iff p + 2q - 1 = 0, \quad 2p - 2q - 2 = 0 \iff (p, q) = (1, 0).$$

El autovector de T asociado a $\lambda_1 = 2$:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 2y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(2, 1)\}.$$

Y asociado a $\lambda_2 = -3$:

$$(T + 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 4x + 2y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(-1, 2)\}.$$

Normalizados quedan:

$$\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}).$$
$$\frac{(-1,2)}{\|(-1,2)\|} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

En definitiva la ecuación de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

(iii) *Hallar su excentricidad y la distancia entre sus vértices.*

Si la ecuación reducida es de la forma:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

entonces la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y la distancia entre vértices $2a$.

En nuestro caso la ecuación reducida era:

$$\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{1/3} = 1.$$

Por tanto $a^2 = 1/2$ y $b^2 = 1/3$.

La excentricidad queda:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5/6}}{\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

y la distancia entre vértices:

$$2a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(iv) *Hallar las tangentes a la curva que pasan por el punto* $(0,1)$.

Los puntos de tangencia son los puntos de corte de la recta polar en $P = (0,1)$ con la cónica.

Calculamos tal recta polar:

$$(0,1,1)A(x,y,1)^t = 0 \iff x - 4y - 2 = 0.$$

Intersecamos con la cónica resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 0 = x - 4y - 2 \\ 0 = x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = 2 + 4y.$$

Susituyendo en la segunda:

$$4 + 16y^2 + 16y + 8y + 16y^2 - 2y^2 - 4 - 8y - 4y = 0 \iff 30y^2 + 12y = 0 \iff y(5y+2) = 0.$$

Se obtiene $y = 0$ ó $y = -2/5$. Los puntos de corte son por tanto:

$$R = (2,0), \qquad S = (2/5, -2/5)$$

Las tangentes pedidas son las rectas que los unen con $P = (0, 1)$:

- La recta PR:

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{1-0} \iff x + 2y - 2 = 0.$$

- La recta PS:

$$\frac{x-0}{2/5-0} = \frac{y-1}{-2/5-1} \iff 7x + 2y - 2 = 0.$$

(1.6 puntos)

7.– Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que es tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$ en el punto $(0, 2)$, pasa por el punto $(2, 0)$ y tiene por centro $(0, 1)$.

Seguiremos el siguiente camino:

- Como la cónica es simétrica respecto al centro calcularemos el simétrico del punto $(0, 2)$ y de la recta $2x + y - 2 = 0$ respecto al centro dado: tendremos una nueva tangente y su punto de tangencia.

- Construimos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y sus puntos de tangencia.

- Imponemos que la cónica pase por el punto $(2, 0)$.

Comenzamos hallando el simétrico P' de $P = (0, 2)$ respecto a $C = (0, 1)$. Se cumple:

$$\frac{P + P'}{2} = C \iff P' = 2C - P = (0, 2) - (0, 2) = (0, 0).$$

El simétrico de la recta $2x + y - 2 = 0$ respecto a C es otra recta paralela a la inicial y pasando por el punto P'. Por el paralelismo es de la forma:

$$2x + y + k = 0.$$

Imponemos que pase por $P' = (0, 0)$:

$$2 \cdot (0) + 0 + k = 0 \iff k = 0.$$

La recta queda $2x + y = 0$.

Construimos el haz conocidas las dos tangentes y los puntos de tangencia. Las cónicas que lo generan son el producto de las tangentes y la recta doble une une los puntos de tangencia $P = (0, 2)$ y $P' = (0, 0)$. Tal recta es $x = 0$.

El haz queda:

$$(2x + y - 2)(2x + y) + \lambda x^2 = 0.$$

Finalmente, imponemos que la cónica pase por $(2, 0)$:

$$(2 \cdot 2 + 0 - 2)(2 \cdot 2 + 0) + \lambda 2^2 = 0 \iff 8 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = -2.$$

La cónica pedida queda:

$$(2x + y - 2)(2x + y) - 2x^2 = 0,$$

Y operando:

$$2x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

(1.3 puntos)

8.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 2x + 2y = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

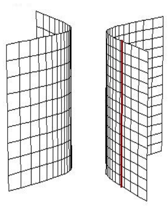
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{H_{42}(-1/3)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1/3)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que la matriz diagonalzia; tiene rango 3 y su signatura es $(-, +, 0; -)$ o equivalentemente $(+, -, 0; -)$. Se trata por tanto de un cilindro hiperbólico.



(0.6 puntos)