Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **25 de mayo de 2015**

1.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica cuya expresión el la base B formada por los vectores $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}$ es:

$$f((x_1,x_2,x_3)_B,(y_1,y_2,y_3)_B) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3.$$

Sea w la forma cuadrática asociada a f.

(i) Calcular la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la correspondiente forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iv) Hallar un vector no nulo autoconjugado.

(v) Calcular $w(1,1,0)$.

(1.3 puntos)

2.– Sea el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que $\|(2,3,1)\| = 3$. Además los vectores $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ tienen la misma norma y forman una base ortogonal.

(i) Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica del producto escalar dado.

(ii) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$.

(iii) Dar una base ortonormal.

(1.4 puntos)

3.– En el espacio afín E_3 calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $A = (1,0,1)$ en $A' = (1,2,1)$. Hallar el simétrico del plano $x+y+z=0$ respecto de la simetría anterior.

(1.3 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base cañonica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.

(1.4 puntos)

5.– En el plano afín sean los puntos $A(-1,0)$ y $P(1,0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.

(1.1 puntos)

6.– En el plano afín se considera la curva de ecuación:

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y = 0.$$

(i) Clasificar la cónica.

(ii) Hallar su ecuación reducida y las ecuaciones de cambio de referencia.

(iii Hallar su excentricidad y la distancia entre sus vértices.

(iv) Hallar las tangentes a la curva que pasan por el punto $(0, 1)$.

(1.6 puntos)

7.– Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que es tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$ en el punto $(0, 2)$, pasa por el punto $(2, 0)$ y tiene por centro $(0, 1)$.

(1.3 puntos)

8.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 2x + 2y = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **25 de maio 2015**

1.– Sexa $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha forma bilineal simétrica; a súa expresión na base B formada polos vectores $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}$ é:

$$f((x_1,x_2,x_3)_B,(y_1,y_2,y_3)_B) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3.$$

Sexa w a forma cuadrática asociada a f.

(i) Calcular a matriz asociada a w respecto da base canónica.

(ii) Clasificar a correspondente forma cuadrática indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Atopar unha base de vectores conxugados.

(iv) Atopar un vector non nulo autoconxugado.

(v) Calcular $w(1,1,0)$.

(1.3 puntos)

2.– Sexa o espazo vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que $\|(2,3,1)\| = 3$. Ademais os vectores $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ teñen a mesma norma e forman unha base ortogonal.

(i) Calcular a matriz de Gram respecto da base canónica do producto escalar dado.

(ii) Calcular o ángulo que forman os vectores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.

(iii) Dar unha base ortonormal.

(1.4 puntos)

3.– No espazo afín E_3 calcular as ecuacions dunha simetría respecto a un plano que leve o punto $A = (1,0,1)$ en $A' = (1,2,1)$. Atopar o simétrico do plano $x + y + z = 0$ respecto da simetría anterior.

(1.3 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ co producto escalar usual e a orientación positiva dada pola base canónica se ten un endomorfismo de matriz asociada na base cañonica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

(i) Atopar os valores de a, b, c para os cales T é una transformación ortogonal.

(ii) Para cada un dos casos anteriores clasificar a correspondente transformación ortogonal indicando se procede o ángulo de xiro ou o eixo de simetría.

(1.4 puntos)

5.– No plano afín sexan os puntos $A(-1,0)$ e $P(1,0)$. Calcular a ecuación implícita do lugar xeométrico de puntos B do plano tales que AB sexa un dos lados iguais dun triángulo isósceles de ortocentro P. Qué tipo de curva é?.

(1.1 puntos)

6.– No plano afín se considera a curva de ecuación:

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y = 0.$$

(i) Clasificar a cónica.

(ii) Atopar a súa ecuación reducida e as ecuacions de cambio de referencia.

(iii Atopar a súa excentricidade e a distancia entre os seus vértices.

(iv) Atopar as tanxentes á curva que pasan polo punto $(0, 1)$.

(1.6 puntos)

7.– Atopar a ecuación dunha cónica sabendo que é tanxente á recta $2x + y - 2 = 0$ no punto $(0, 2)$, pasa polo punto $(2, 0)$ e ten por centro $(0, 1)$.

(1.3 puntos)

8.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 2x + 2y = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
