Álgebra Lineal II **Examen Final**

Soluciones (3 horas) **13 de julio de 2015**

1.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y dado* $a \in \mathbb{R}$ *se considera la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 - 5ay^2 + 4z^2 - 2axy - 2ayz.$$

(i) *Clasificar* w *en función de los valores de* a *indicando además su rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos su matriz asociada por congruencia. Tal matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & -5a & -a \\ 0 & -a & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizamos haciendo las mismas operaciones fila que columna:

$$A \xrightarrow{H_{21}(a)}\xrightarrow{\mu_{21}(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5a - a^2 & -a \\ 0 & -a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}\xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -a \\ 0 & -a & -5a - a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(a/4)}\xrightarrow{\mu_{23}(a/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5a - 5a^2/4 \end{pmatrix}.$$

Clasificamos la forma cuadrática en función de los signos de la matriz diagonalizada. Para distinguir casos, analizamos para que valores de a se anulan:

$$5a - 5a^2/4 = 0 \iff a = 0 \text{ ó } a = -4.$$

- Si $a < -4$ los signos son $+, +, -$. Por tanto $sign(w) = (2, 1)$, $rango(w) = 3$ y w es indefinida y no degenerada.

- Si $a = -4$ los signos son $+, +, 0$. Por tanto $sign(w) = (2, 0)$, $rango(w) = 2$ y w es semidefinida positiva y degenerada.

- Si $-4 < a < 0$ los signos son $+, +, +$. Por tanto $sign(w) = (3, 0)$, $rango(w) = 3$ y w es definida positiva y no degenerada.

- Si $a = 0$ los signos son $+, +, -$. Por tanto $sign(w) = (2, 0)$, $rango(w) = 2$ y w es semidefinida positiva y degenerada.

- Si $a > 0$ los signos son $+, +, -$. Por tanto $sign(w) = (2, 1)$, $rango(w) = 3$ y w es indefinida y no degenerada.

(ii) *¿Para qué valores de* a *no existen vectores no nulos autoconjugados?.*

No existen vectores autoconjugados no nulos cuando la forma cuadrática es definida (negativa o positiva). En nuestro caso cuando $-4 < a < 0$.

(iii) *Para* $a = -2$ *encontrar, si es posible, un vector* $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $w(\vec{u}) < 0$.

Para $a = -2$ la forma cuadrática vimos que es definida positica, por tanto no existen vectores cuya imagen por ella sea negativa.

(iv) *Para* $a = -2$*:*

a) *Probar que w define un producto escalar.*

Una forma cuadrática define un producto escalar si y sólo si es definida positiva. Pero hemos visto en el apartado (i) que si $-4 < a < 0$ la forma cuadrática es defnida positiva. Por tanto para $a = -2$ define un producto escalar.

b) *Dar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, tomando como producto escalar el definido por w.*

Construimos una base B' cuyos dos primeros vector son los generadores de U y los restantes ortogonales a este. La matriz del producto escalar que usaremos es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un vector (x,y,z) es ortogonal a $(1,0,0)$ si cumple:

$$(1,0,0)G(x,y,z)^t = 0 \iff x + 2y = 0.$$

y ortogonal a $(0,1,0)$ si:

$$(0,1,0)G(x,y,z)^t = 0 \iff 2x + 10y + 2z = 0.$$

Por tanto:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in R^3 | x + 2y = 0, \quad x + 5y + z = 0\} = \mathcal{L}\{(-2,1,-3)\}.$$

Consideramos la base:

$$B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(-2,1,-3)\}.$$

En tal base la matriz de la proyección pedida es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC} = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.7 puntos)

2.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$x = a, \quad y = -12 - a, \quad z = 5$$

y su vector director $(1, -1, 0)$; por tanto un punto P de tal recta es de la forma $P = (a, -12 - a, 5)$.

Un punto Q de la recta s es de la forma $Q = (1, 2 + b, 2 + 2b)$.

La distancia $d(P, Q)$ coincide con la distancia buscada $d(r, s)$ cuando el vector PQ es perpendicular a las dos rectas dadas:

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3).$$

Imponemos las condiciones de perpendicularidad. Hay que recordar que para hacer los productos escalares hay que usar la matiz de Gram dada:

$$PQ \perp (1, -1, 0) \iff PQ \cdot (1, -1, 0) = 0 \iff (1-a, 14+a+b, 2b-3) G_C (1, 1, 0)^t = 0 \iff -7-2a-5b = 0.$$

y

$$PQ \perp (0, 1, 2) \iff PQ \cdot (0, 1, 2) = 0 \iff (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) G_C (0, 1, 2)^t = 0 \iff 34 + 5a + 29b = 0.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = -1$$

Por tanto

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) = (1 + 1, 14 - 1 - 1, 2(-1) - 3) = (2, 12, -5)$$

La distancia pedida es la norma del vector $\vec{P}Q$; recordemos de nuevo usar la matriz de Gram para calcularla:

$$\|PQ\| = \sqrt{(2, 12, -5) G_C (2, 12, -5)^t} = \sqrt{33}.$$

(1 punto)

3.– *Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Por ser indefinida su matriz asociada en alguna base es diagonal con un uno e un menos uno en las posiciones primera y segunda. Si tal base es $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ lo anterior significa que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = 1$, $f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) = -1$, $f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$. Pero entonces:

$$w(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + 2f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Y por tanto $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ es un vector no nulo autoconjugado.

(ii) *Una forma cuadrática definida negativa no puede tener vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Si definida negativa para cualquier vector no nulo $\vec{u}$, se tiene que $w(\vec{u}) < 0$ y por tanto no es autoconjugado.

(iii) *Una forma cuadrática con vectores autoconjugados no nulos es degenerada.*

FALSO. Por ejemplo basta tomar una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada en la base canónica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es no degenerada por que su matriz asociada es inversible y tiene vectores autoconjugados no nulos por ser indefinida.

(iv) *Una forma cuadrática indefinida pero no degenerada nunca tiene vectores autoconjugadas no nulos.*

FALSO. Por lo explicado en (i) una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos, independientemente de ser o no degenerada.

(1.2 puntos)

4.– *En el plano afín hallar las ecuaciones y ángulo de un giro con centro en el punto $(1,1)$ y que lleve la recta $x+2y-1=0$ en la recta $x-2y-1=0$.*

El giro llevará el vector CA que une $(1,1)$ con la primera recta y es perpendicular a ella al vector CB que une el centro con la segunda recta y es igualmente ortogonal a esta.

Para hallar tales vectores calculamos rectas perpendicualres a las dadas que pasen por el centro de giro y las intersecamos con las propias rectas, obteniendo los puntos A y B.

Una recta perpendicular a $x+2y-1=0$ es de la forma $2x-y+c=0$. Imponiendo que pase por el centro $(1,1)$ se obtiene $c=-1$, es decir, la recta $2x-y-1=0$. La intersección de ambas rectas es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{array}\right\} \iff A=(x,y)=(3/5,1/5).$$

Una recta perpendicular a $x-2y-1=0$ es de la forma $2x+y+d=0$. Imponiendo que pase por el centro $(1,1)$ se obtiene $d=-3$, es decir, la recta $2x+y-3=0$. La intersección de ambas rectas es:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{array}\right\} \iff B=(x,y)=(7/5,1/5).$$

El vector CA es $A-C=(-2/5,-4/5)$; el vector CB es $B-C=(2/5,-4/5)$.

El ángulo de giro α verifica por tanto:

$$cos(\alpha)=cos(CA,CB)=\frac{CA\cdot CB}{\|CA\|\|CB\|}=\frac{12/25}{20/25}=\frac{3}{5}$$

El signo del ángulo es la orientacií de la base $\{CA,CB\}$, es decir, el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} -2/5 & -4/5 \\ 2/5 & -4/5 \end{vmatrix} = 16/25 > 0.$$

Y entonces:

$$sin(\alpha)=+\sqrt{1-cos^2(\alpha)}=4/5.$$

Finalmente las ecuaciones de giro de centro $(1,1)$ y ángulo α son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

5.– *En* $\mathbb{R}^3$ *consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

Utilizamos que el determinante y traza de la matriz asociada a la transformación ortogonal se conserva al cambiarla de base. El determinante de A es 1 por lo que se trata de una transformación directa: un giro de ángulo α. La traza es 1, por lo que:

$$1 + 2Cos(\alpha) = 1$$

Por tanto $cos(\alpha) = 0$ y $\alpha = \pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}.$$

Para saber el signo del ángulo, consideramos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), A(1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)\}.$$

Vemos que

$$det(M_{BC}) < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 1)$.

(1 punto)

6.– *Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro* $a \in R$*:*

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

a) *Clasificar las cónicas en función de* a*.*

Las matrices asociadas a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -a & -a \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -a \end{pmatrix}.$$

Clasificamos la cónica en función de los determinantes de A y T:

$$det(A) = -a^2 - 9a = -a(a - 9), \qquad det(T) = -a - 16$$

Distinguimos los casos tomando como valores límite de a aquellos en los que se anulan los determinantes y por tanto susceptibles de ser la frontera de intervalos con signos diferentes:

	$\|T\|$	$\|A\|$	Clasficación
$a < -16$	$+$	$-$	elipse
$a = -16$	0	$-$	parábola
$-16 < a < 0$	$-$	$-$	hipérbola
$a = 0$	$-$	0	rectas reales que se cortan
$0 < a < 9$	$-$	$+$	hipérbola
$a = 9$	$-$	0	rectas reales que se cortan
$a > 9$	$-$	$-$	hipérbola

b) *Para $a=-1$ hallar la distancia entre sus dos focos.*

Para $a=-1$ se trata de una hipérbola.

Calculamos su ecuación reducida de la forma:

$$\frac{x''^2}{a'^2}-\frac{y''^2}{b'^2}=1$$

La distancia focal en ese caso será $2c'=2\sqrt{a'^2+b'^2}$.

Para la ecuación reducida comenzamos calculando los autovalores de T:

$$|T-\lambda Id|=0 \iff (1-\lambda)^2-4^2=0 \iff (\lambda+3)(\lambda-5)=0.$$

Los autovalores son $\lambda_1=-3$ y $\lambda_2=5$ (ponemos primero el negativo porque $det(A)=-10<0$). La ecuación reducida queda de la forma:

$$-3x''^2+5y''^2+d=0 \qquad \text{con } d=\frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{-10}{-15}=\frac{2}{3}.$$

Queda:

$$-3x''^2+5y''^2+\frac{2}{3}=0 \iff 3x''^2-5y''^2=\frac{2}{3} \iff \frac{3x''^2}{2/3}-\frac{5y''^2}{2/3}=1$$

Y finalmente:

$$\frac{x''^2}{2/9}-\frac{y''^2}{2/15}=1.$$

La distancia focal es:

$$2\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{2}{15}}=2\sqrt{\frac{10+6}{45}}=\frac{8\sqrt{45}}{45}=\frac{8\sqrt{5}}{15}.$$

c) *Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.*

Los casos son $a=0$ y $a=9$.

Para $a=0$ la ecuación dada queda:

$$x^2+8xy-2x=0 \iff x(x+8y-2)=0$$

Las dos rectas son por tanto $x=0$ y $x+8y-2=0$.

Para $a=9$ la ecuación queda:

$$x^2+8xy-9y^2-2x-18y=0.$$

La descomposición algebraica no es tan obvia. Procedemos de la siguiente forma:

- Calculamos el centro (p,q) de la cónica:

$$A\begin{pmatrix}p\\q\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$$

donde h es cualquier valor real. Queda:

$$p+4b-1=0, \quad 4p-9q-9=0.$$

De donde $(p,q)=(9/5,-1/5)$.

- Intersecamos una recta cualquiera con la cónica. Por ejemplo $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x^2 + 8xy - 9y^2 - 2x - 18y &= 0 \end{aligned}\right\} \iff (x, y) = (0, 0) \text{ ó } (x, y) = (0, -2)$$

- Las rectas que buscamos son las que unen el centro con los dos puntos hallados:

La recta que une $(9/5, -1/5)$ y $(0, 0)$ es:

$$\frac{x - 0}{9/5} = \frac{y - 0}{-1/5} \iff x + 9y = 0.$$

La recta que une $(9/5, -1/5)$ y $(0, -2)$ es:

$$\frac{x - 0}{9/5} = \frac{y + 2}{-1/5 + 2} \iff x - y - 2 = 0.$$

(2 puntos)

7.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4x - 4y - 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matria asociada a la cuádrica es:

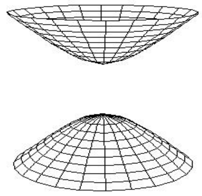
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida, ni sumada a las demás, ni multiplicada por un número:

$$A \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \xrightarrow{H_{41}(-2)} \xrightarrow{\mu_{41}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(-, +, +; +)$ o equivalentemente $(+, +, -; +)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de dos hojas.



(0.6 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una hipérbola con los vértices en los puntos* $(0,0)$ *y* $V = (2,2)$ *y una asíntota perpendicular a la recta* $2x + y = 0$.

Seguiremos los siguientes pasos:

- El centro es el punto medio de los vértices y el eje la recta que los une.

- Una de las asíntotas es perpendicular a la dada y pasando por el centro.

- Calculamos el simétrico de la asíntota respecto al eje para obtener una segunda asíntota. Un punto de ella sabemos que es el centro. El otro será el simétrico respecto al eje de un punto de la primera asíntota.

- Finalmente planteamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas e imponemos que la cónica buscada pase por uno de los vértices.

El centro es:

$$C = \frac{(0,0) + (2,2)}{2} = (1,1).$$

El eje la recta que une $(0,0)$ y $(2,2)$:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{2-0} \iff x - y = 0.$$

Una recta perpendicular a $2x + y = 0$ es de la forma $x - 2y + c = 0$. Imponiendo que pase por el centro $(1,1)$ queda $c = 1$. Es decir la recta $x - 2y + 1 = 0$.

Tomamos un punto cualquiera de la asíntota dada $x - 2y + 1 = 0$. Por ejemplo $P = (-1,0)$. Su simétrico $P' = (a,b)$ respecto al eje cumple:

$$\frac{P + P'}{2} \in eje \iff \frac{a-1}{2} - \frac{b}{2} = 0 \iff a - b = 1.$$

y

$$\vec{PP'} \perp eje \iff (a+1, b) \perp (1,1) \iff a + b = -1$$

Obtenemos $P' = (a,b) = (0,-1)$.

La segunda asíntota es por tanto la recta que une el centro $(1,1)$ con $(0,-1)$:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y+1}{1+1} \iff 2x - y - 1 = 0$$

El correspondiente haz de cónicas conocidas dos asíntotas es:

$$(x - 2y + 1)(2x - y - 1) + d = 0$$

Imponemos que pase por el vértice $(0,0)$:

$$(0 - 2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 - 0 - 1) + d = 0 \iff d = 1.$$

La cónica queda:

$$(x - 2y + 1)(2x - y - 1) + 1 = 0 \iff 2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y = 0.$$

(1.5 puntos)