Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **13 de julio de 2015**

1.– En $\mathbb{R}^3$ y dado $a \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z) = x^2 - 5ay^2 + 4z^2 - 2axy - 2ayz.$$

(i) Clasificar w en función de los valores de a indicando además su rango y signatura.

(ii) ¿Para qué valores de a no existen vectores no nulos autoconjugados?.

(iii) Para $a = -2$ encontrar, si es posible, un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\vec{u}) < 0$.

(iv) Para $a = -2$:

a) Probar que w define un producto escalar.

b) Dar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, tomando como producto escalar el definido por w.

(1.7 puntos)

2.– En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(0,1,2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

(1 punto)

3.– Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.

(ii) Una forma cuadrática definida negativa no puede tener vectores autoconjugados no nulos.

(iii) Una forma cuadrática con vectores autoconjugados no nulos es degenerada.

(iv) Una forma cuadrática indefinida pero no degenerada nunca tiene vectores autoconjugadas no nulos.

(1.2 puntos)

4.– En el plano afín hallar las ecuaciones y ángulo de un giro con centro en el punto $(1,1)$ y que lleve la recta $x + 2y - 1 = 0$ en la recta $x - 2y - 1 = 0$.

(1 punto)

5.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

(1 punto)

6.– Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $a \in R$:

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

a) Clasificar las cónicas en función de a.

b) Para $a = -1$ hallar la distancia entre sus dos focos.

c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

(2 puntos)

7.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4x - 4y - 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una hipérbola con los vértices en los puntos $(0,0)$ y $V = (2,2)$ y una asíntota perpendicular a la recta $2x + y = 0$.

(1.5 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **13 de Xulio de 2015**

1.– En $\mathbb{R}^3$ e dado $a \in \mathbb{R}$ se considera a forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z) = x^2 - 5ay^2 + 4z^2 - 2axy - 2ayz.$$

(i) Clasificar w en función dos valores de a indicando ademaiss o seu rango e a súa signatura.

(ii) Para qué valores de a non existen vectores non nulos autoconxugados?.

(iii) Para $a = -2$ encontrar, se é posible, un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\vec{u}) < 0$.

(iv) Para $a = -2$:

a) Probar que w define un producto escalar.

b) Dar a matriz asociada respecto da base canónica da proxección ortogonal sobre o subespazo $U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, tomando como producto escalar o definido por w.

(1.7 puntos)

2.– No espazo afín se considera o producto escalar dado pola matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sexan as rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(0,1,2).$$

Calcular a distancia entre as rectas r e s.

(1 punto)

3.– Razoar a falsedade ou veracidade das seguintes afirmacións:

(i) Unha forma cuadrática indefinida sempre ten vectores autoconxugados non nulos.

(ii) Unha forma cuadrática definida negativa non pode ter vectores autoconxugados non nulos.

(iii) Unha forma cuadrática con vectores autoconxugados non nulos é dexenerada.

(iv) Unha forma cuadrática indefinida pero non dexenerada nunca ten vectores autoconxugadas non nulos.

(1.2 puntos)

4.– No plano afín atopar as ecuacións e ángulo dun xiro con centro no punto $(1,1)$ e que leve a recta $x + 2y - 1 = 0$ na recta $x - 2y - 1 = 0$.

(1 punto)

5.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos o producto escalar usual e a orientación da base canónica. Se define a transformación ortogonal que nesta base ten asociada a matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir a súa natureza e descompoñela en xiros e/ou simetrías.

(1 punto)

6.– Se considera a familia de cónicas dependente do parámetro $a \in R$:

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

a) Clasificar as cónicas en función de a.

b) Para $a = -1$ atopar a distancia entre os seus dous focos.

c) Para as cónicas da familia que se descompoñan nun par de rectas que se cortan, atopar tales rectas.

(2 puntos)

7.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4x - 4y - 1 = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha hipérbola cos vértices nos puntos $(0, 0)$ e $V = (2, 2)$ e unha asíntota perpendicular á recta $2x + y = 0$.

(1.5 puntos)
