Álgebra Lineal II **Solución del Examen Parcial**

Geometría afín. (45 minutos) **25 de abril de 2016**

1.– *En el espacio afín E_3 consideramos el plano π que pasa por el origen y tiene por vectores directores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{u}_2 = (1,0,1)$. Sea la recta r de ecuaciones implícitas:*

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

(i) *Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 perpendicular a π, paralelo a r y pasando por el punto $(1,0,0)$.*

El plano buscado pasa por $(1,0,0)$ y tiene por vectores directores el vector normal de π y el vector director de r.

El vector normal del plano π_1 es el producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (1,-1,-1)$$

Para hallar el vector director de la recta pasamos de implícitas a paramétricas:

$$z = x - 1, \qquad y = 3z + 2 - x = 3x - 3 + 2 - x = 2x - 1,$$

de donde las paramétricas son:

$$x = \lambda, \qquad y = -1 + 2\lambda, \quad z = -1 + \lambda.$$

El vector director es $(1,2,1)$.

El plano π_1 pasa por $(1,0,0)$ y tiene por vectores directores el $(1,-1,-1)$ y $(1,2,1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Operando queda:

$$x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

(ii) *Calcular el ángulo que forman π y r.*

El complementario del ángulo pedido α es el ángulo que forman el vector normal del primero y director de la recta. Por tanto:

$$\alpha = arcsin\frac{(1,-1,-1)\cdot(1,2,1)}{\|(1,-1,1)\|\|(1,2,1)\|} = arcsin\frac{-2}{3\sqrt{2}} = arcsin\frac{-\sqrt{2}}{3}.$$

(iii) *Calcular la distancia entre el plano π_1 calculado anteriormente y la recta r.*

Dado que son paralelos, equivale a la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta obtenido en las paramétricas es $(0,-1,1)$. El plano tiene por ecuación $x - 2y + 3z - 1 = 0$. Por tanto la distancia es:

$$\frac{|0 - 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 - 1|}{\|(1,-2,3)\|} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

(5 puntos)

2.– *En el plano afín E_2 con las condiciones usuales, hallar el centro de un giro de 90^o que lleva el punto $(1,2)$ en el punto $(3,1)$.*

Si llamamos (p,q) al centro de giro, las ecuaciones del mismo son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(90^o) & -sin(90^o) \\ sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

es decir:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

Imponiendo que $f(1,2) = (3,1)$ queda:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p \\ 2-q \end{pmatrix}$$

De donde resolviendo se obtiene $(p,q) = (5/2, 5/2)$ y la ecuación de giro queda:

$$f(x,y) = (5/2, 5/2) + (5/2 - y, x - 5/2) = (5-y, x).$$

En particular el centro de giro es $(p,q) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

(3 puntos)

3.– *En el espacio afín E_3 hallar las ecuaciones de una homotecia con centro $(1,2,-1)$ y razón 2. ¿En qué punto se transforma el origen?.*

La ecuación de una homotecia de centro C y razón k es:

$$f(X) = C + k(C - X)$$

En nuestro caso:

$$f(x,y,z) = (1,2,-1) + 2((x,y,z) - (1,2,-1)) = (2x-1, 2y-2, 2z+1)$$

El transformado del origen es:

$$f(0,0,0) = (-1,-2,1).$$

(2 puntos)
