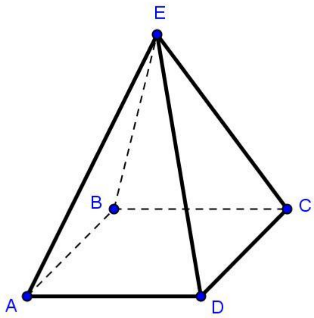
Álgebra Lineal II — Examen Parcial

Geometría afín. (45 minutos) **23 de abril de 2014**

1.– *En el espacio afín E_3 consideramos la pirámide regular de base cuadrada de vértices A, B, C, D, E,*



donde:

$$A = (0,0,0), \quad B = (0,5,0), \quad D = (3,0,4), \quad Volumen = 125.$$

(i) *Calcular la ecuación de la recta que contiene a la altura de la pirámide.*

La altura es perpendicular a la base. Además, dado que la pirámide es regular y su base es cuadrada, la altura pasa por el punto medio M de la misma:

$$M = \frac{B+D}{2} = (3/2, 5/2, 2).$$

Su vector director es el producto vectorial del vector $\vec{A}B$ y $\vec{A}D$:

$$\vec{A}B \times \vec{A}D = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20\vec{e}_1 - 15\vec{e}_3.$$

La ecuación vectorial de la recta queda por tanto:

$$(x,y,z) = (3/2, 5/2, 2) + \lambda(20, 0, -15).$$

(ii) *Calcular las coordenadas de los vértices C y E.*

Dado que $\vec{B}C = \vec{A}D$:

$$C = B + \vec{B}C = B + \vec{A}D = (0,5,0) + (3,0,4) = (3,5,4).$$

El vértice E se encuentra sobre la altura calculada en el apartado anterior y así:

$$E = (3/2, 5/2, 2) + \lambda(20, 0, -15)$$

y

$$\vec{M}E = \lambda(20, 0, -15)$$

Además la distancia $h = ME$ por la fórmula del volumen de una pirámide cumple:

$$Vol = \frac{1}{3} Area\, base \cdot h$$

Donde:

$$Area\,base = \|AB\|^2 = 25, \qquad Vol = 125.$$

Deducimos que $h = \dfrac{3 \cdot 125}{25} = 15$. Por tanto:

$$\vec{M}E = 15 \iff |\lambda| \|(20, 0, -15)\| = 15 \iff \lambda = \pm \frac{15}{25} = \pm \frac{3}{5}.$$

Por tanto hay dos posibles posiciones para el vértices:

$$E = (3/2, 5/2, 2) + \frac{3}{5}(20, 0, -15) = (27/2, 5/2, -7).$$

ó

$$E = (3/2, 5/2, 2) - \frac{3}{5}(20, 0, -15) = (-21/2, 5/2, 11).$$

(iii) *Hallar (si existe) las ecuaciones de un giro que lleve los vértices A, B, C, D respectivamente en B, C, D, A.*

En el plano que contiene a la base de la pirámide estamos girando el cuadrado un ángulo de 90 grados respecto al centro del mismo. Por tanto tomamos un giro de semieje la recta perpendicular a la base y que pasa por el centro (precisamente la recta que contiene a la altura calculada en (i)).

El centro del cuadrado $M = (3/2, 5/2, 2)$ es un punto fijo del giro; las ecuaciones del mismo son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x - 3/2 \\ y - 5/2 \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

donde T_C es la matriz de giro.

Tomaremos como generador del semieje el vector director (ó un múltiplo) de la recta calculado en (i): $(4, 0, -3)$. Para saber el signo del ángulo de giro consideramos una base formada por el semieje, un vector y el mismo vector girado. Tenemos en cuenta que el vector $\vec{A}B$ se trasnforma en el vector $\vec{B}C$:

$$\{(4, 0, -3), (0, 5, 0), (3, 0, 4)\}.$$

De manera que signo(ángulo)=$signo \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = signo(25) = +1.$

Se trata entonces de un giro de 90 grados. Construimos una base ortogonal cuyo primer vector sea el semieje de giro:

$$B_2 = \{(4, 0, -3), \vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

Imponemos que $\vec{u}_1 = (x, y, z)$ es perpendicular a $(4, 0, -3)$:

$$(4, 0, -3) \cdot (x, y, z) = 0 \iff 4x - 3y = 0.$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_1 = (0, 5, 0)$. Ahora $\vec{u}_2$ ha de cumplir la condición anterior y además ser perpendicular a $\vec{u}_1$:

$$(0, 5, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \iff 5z = 0.$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (3, 0, 4)$. Comprobamos si la base B_2 tiene orientación positiva, es decir, si el determinante de la matriz de cambio de base a la base canónica es positivo:

$$det(M_{CB_2}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 25 > 0.$$

Normalizamos la base para convertirla en una base ortonormal con orientación positiva:

$$B_1 = \{(4/5, 0, -3/5), (0, 1, 0), (3/5, 0, 4/5)\}.$$

En tal base la matriz de giro es:

$$T_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix}.$$

La pasamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB_1} T_{B_1} M_{CB_1}^{-1} = M_{CB_1} T_{B_1} M_{CB_1}^t$$

donde estamos usando que por ser una matriz de cambio de base entre bases ortonormales $M_{CB_1}^{-1} = M_{CB_1}^t$. Operando queda:

$$T_C = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 15 & -12 \\ -15 & 0 & -20 \\ -12 & 20 & 9 \end{pmatrix}.$$

Finalmente las ecuaciones del giro son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 15 & -12 \\ -15 & 0 & -20 \\ -12 & 20 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 3/2 \\ y - 5/2 \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

(iv) *Hallar las ecuaciones de una homotecia con centro en el vértice B que transforme la pirámide en otra con volumen el triple del inicial.*

Teniendo en cuenta que el volumen se triplica la razón k de la homotecia cumple $|k|^3 = 3$ y así $k = \pm\sqrt[3]{3}$. Por tanto hay dos posibles homotecias en las condiciones descritas:

$$f(x, y, z) = (0, 5, 0) + \sqrt[3]{3}(x, y - 5, z)$$

y

$$f(x, y, z) = (0, 5, 0) - \sqrt[3]{3}(x, y - 5, z).$$

(v) *¿Existe una isometría asociada a una transformación ortogonal directa que intercambie los vértices B y C respectivamente por A y D y deje fijo el punto E?. Razona la respuesta.*

Teniendo en cuenta que el punto E queda fijo y que A, B, C, D debieran de ir respectivamente en B, A, D, C, la base:

$$B_1 = \{\vec{A}E, \vec{A}B, \vec{A}C\} = \{(27/2, 5/2, -7), (0, 5, 0), (3, 5, 4)\}$$

debería de ir en:

$$B_2 = \{\vec{B}E, \vec{B}A, \vec{B}D\} = \{(27/2, -5/2, -7), (0, -5, 0), (3, -5, 4)\}$$

Pero la orientación de la primera base es positiva, ya que $signo(det(M_{CB_1}) > 0$; la de la segunda es negativa, ya que $signo(det(M_{CB_2}) < 0$. Por tanto es imposible que exista una transformación **directa** que lleve una en la otra, ya que las transformaciones directas conservan la orientación.