Álgebra Lineal II — Solución al Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **26 de febrero de 2014**

1.– *En* $\mathbb{R}^2$ *consideramos una forma bilineal simétrica* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y su forma cuadrática asociada* $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se sabe que:*

a) $B = \{(1,1),(2,3)\}$ *es una base de vector conjugados.*

b) $w(1,1) = 1$, $w(2,3) = -1$.

(i) *Clasificar* w *indicando además su rango y signatura.*

Calculamos primero la matriz asociada a f respecto a la base B. Por ser una base de vectores conjugados la matriz es diagonal. Además por definición de matriz asociada a una forma bilineal respecto de una base:

$$F_B = \begin{pmatrix} f((1,1),(1,1)) & 0 \\ 0 & f((2,3),(2,3)) \end{pmatrix}.$$

Pero $f((1,1),(1,1)) = w(1,1) = 1$ y $f((2,3),(2,3)) = w(2,3) = -1$; por tanto:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $rango(f) = rango(F_B) = 2$; $sign(w) = (1,1)$. Así la forma cuadrática es no degenerada e indefinida.

(ii) *Calcular la matriz asociada a* f *respecto de la base canónica.*

Basta hacer un cambio de base:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC},$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando se obtiene:

$$F_C = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados.*

Si trabajamos respecto a la base B se tiene:

$$\begin{aligned} Autconj(w) &= \{(x',y')_B | w((x',y')_B) = 0\} = \{(x',y')_B | (x',y')_B F_B (x',y')_B^t) = 0\} = \\ &= \{(x',y')_B | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x',y')_B | (x'-y')(x'+y') = 0\} = \\ &= \{(x',y')_B | x'-y' = 0\} \cup \{(x',y')_B | x'+y' = 0\} = \mathcal{L}\{(1,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,-1)_B\}. \end{aligned}$$

Cambiamos a la base canónica los subespacios obtenidos, cambiando de base sus generadores:

$$M_{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_C, \quad M_{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}_C.$$

Por tanto:

$$Autconj(w) = \mathcal{L}\{(3,4)\} \cup \mathcal{L}\{(-1,-2)\}.$$

(iv) *¿Es posible encontrar una base* B' *respecto a la cuál la matriz asociada a* f *sea la identidad?. Razonar la respuesta. En caso afirmativo calcularla.*

La matriz identidad tiene signatura $(2,0)$, mientras que w tiene signatura $(1,1)$. Dado que la signatura de una forma cuadrática sólo depende de w (y no de la base en la cuál se trabaja) no es posible.

(v) *¿Es posible encontrar una base B'' respecto a la cuál la matriz asociada a f sea* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dos matrices están asociadas a una misma forma cuadrática si y sólo si con congruentes; dos matrices son congruentes si y sólo si al digaonalizarlas por congruencia aparece el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal (la misma signatura). Si calculamos la signatura de la matriz dada diagonalizándola por congruencia obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tiene signatura $(1,-1)$ la misma que w. Por tanto si es posible encontrar la base B'' en las condiciones que se indican.

(6 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^4$ se considera la forma cuadrática dada por:

$$w(x,y,z,t) = (a-2)x^2 + y^2 + at^2 + 2xy - 2xz + 2xt - 2yz + 2yt - 2zt.$$

(i) *Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica. Tal matriz es:

$$F_C = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Aplicamos congruencia:

$$F_C \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(1)}{\longrightarrow} \overset{H_{41}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{41}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que los valores de a para los cuales se anula algún término de la diagonal son $a = 1$ y $a = 3$. Por tanto distinguimos los casos:

- si $a < 1$ la signatura es $(1,3)$ y el rango 4. Es no degenerada e indefinida.

- si $a = 1$ la signatura es $(1,2)$ y el rango 3. Es degenerada e indefinida.

- si $1 < a < 3$ la signatura es $(2,2)$ y el rango 4. Es no degenerada e indefinida.

- si $a = 3$ la signatura es $(2,1)$ y el rango 3. Es degenerada e indefinida.

- si $a > 3$ la signatura es $(3,1)$ y el rango 4. Es no degenerada e indefinida.

(ii) *Dar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es una base en la cuál la matriz asociada es diagonal. Como en el apartado anterior hemos diagonalizado la matriz asociada respecto de la base canónica, la matriz de paso por filas de la congruencia hecha estará formanda por las coordenadas respecto de la base canónica de los vectores de una base de vectores conjugados.

Para hallar tal matriz de paso hacemos sobre la identidad las mismas operaciones filas hechas antes:

$$Id \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(1)}{\longrightarrow} \overset{H_{41}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(0,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,1,1,0),(0,-1,0,1)\}.$$

(4 puntos)