Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **26 de mayo de 2014**

1.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que:*

- *$B = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de vectores conjugados.*

- *$(1,2,3)$ es autoconjugado, $(1,0,1) \in ker(w)$ y $w(2,1,0) = 3$.*

(i) *Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

Comenzamos hallando la matriz asociada en la base B. Como ésta es de vectores conjugados, la matriz asociada es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Para aplicar las otras condiciones usando esta matriz pasamos los vectores dados a la base B. Tenemos que:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad M_{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$$

Entonces:

- Si $(1,2,3)$ es autoconjugado:

$$0 = w(1,2,3) = w((3,-2,2)_B) = (3,-2,2)F_B(3,-2,2)^t = 9a + 4b + 4c.$$

- Si $(1,0,1) = (1,0,0)_B \in ker(w)$ entonces:

$$(1,0,0)F_B = (0,0,) \Rightarrow a = 0.$$

- Si $w(2,1,0) = 3$ entonces:

$$3 = w(2,1,0) = w((0,2,1)_B) = (0,2,1)F_B(0,2,1)^t \Rightarrow 4b + c = 3.$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones se obtiene $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Finalmente hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.*

La matriz F_B ya es diagonal. Vemos que su rango es 2 y su signatura $(1,1)$. Por tanto la forma cuadrática es degenerada e indefinida.

(iii) *Si f es la forma polar asociada a w calcular $f((1,1,0),(0,1,1))$.*

Simplemente:

$$f((1,1,0),(0,1,1)) = (1,1,0)F_C(0,1,1)^t = -2.$$

(iv) *Hallar, si existe, una base B' tal que la matriz asociada a w en tal base sea:*

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que la matriz $F_{B'}$ tiene la misma signatura que la forma cuadrática dada si es posible encontar la base con la matriz asociada indicada. Como el cambio de base de una matriz asociada a una forma cuadrática se realiza por congruencia, tratamos de llegar de la matriz F_B a $F_{B'}$ haciendo operaciones elementales fila y las mismas en columna:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base $M_{BB'}$ se obtiene haciendo las mismas operaciones columna sobre la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{BB'}.$$

Por tanto:

$$M_{CB'} = M_{CB}M_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y así la base pedida es la formada por las columnas de esta matriz:

$$B' = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,0,1)\}.$$

2.– *Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio euclideo con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica. Se considera el endomorfismo:*

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

(i) *Probar que t es una transformación ortogonal.*

Para que sea ortogonal su matriz asociada respecto a una base ortonormal (por ejemplo la canónica) ha de cumplir $T_C T_C^t = Id$. Pero:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto efectivamente $T_C T_C^t = Id$.

(ii) *Describir geométricamente la transformación t.*

Primero calculamos el determinante de la matriz asociada T_C. Si es 1 se trata de un giro; si es -1 se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Tenemos $det(T_C) = -1$. Por tanto es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Para hallar el ángulo de giro α tenemos en cuenta que:

$$traza(T_C) = -1 + 2cos(\alpha) \iff 1 = -1 + 2cos(\alpha) \iff cos(\alpha) = 1 \iff \alpha = 0.$$

El ángulo es nulo y entonces en realidad es simplemente una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio característico de autovectores asociados al 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (T_C - Id)(x,y,z)^t = (0,0,0)\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y + \sqrt{2}z = 0,\ x - y - \sqrt{2}z = 0\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - \sqrt{2}z = 0\}. \end{aligned}$$

En definitiva es una simetría respecto al plano $x - y - \sqrt{2}z = 0$.

(iii) *Dada la recta r de ecuaciones $x + y = 0, \quad z = 0$, hallar las ecuaciones de la recta que se obtiene al aplicarle el endomorfismo t a r.*

Basta girar el generador de la recta. Para hallar tal generador pasamos de implícitas a paramétricas:

$$x + y = 0, \quad z = 0 \iff x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = 0.$$

El vector director es $(1,-1,0)$. Lo multiplicamos por la matriz de la transformación para hallar su imagen:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La recta imagen está generada por el vector $(0,0,\sqrt{2})$ o equivalentemente por $(0,0,1)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \lambda;$$

y las implícitas:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

(1.3 puntos)

3.– *En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y - 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.*

(i) *Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.*

Un punto $P = (a,b)$ de la recta s cumple la ecuación $x - y = 0$. Por tanto $a - b = 0$ y $a = b$. Podemos escribir $P = (a,a)$.

La recta perpendicular a s que pasa por P tiene por vector director el vector normal de s, es edcir, $(1,-1)$. Su ecuación vectorial es:

$$(x,y) = (a,a) + \lambda(1,-1).$$

Cortamos con la recta r, $y = 1$:

$$a - \lambda = 1 \iff \lambda = a - 1$$

El punto de corte Q es:

$$(a,a) + (a-1)(1,-1) = (2a-1,1)$$

Finalmente el punto medio de P y Q es:

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{(a,a) + (2a-1,1)}{2} = \left(\frac{3a-1}{2}, \frac{a+1}{2}\right).$$

Las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico son:

$$x = \frac{3a-1}{2}, \quad y = \frac{a+1}{2}.$$

Para hallar las implícitas despejamos el parámetro a en una ecuación y sustituimos en la otra:

$$a = 2y - 1, \qquad 2x = 3a - 1 = 3(2y-1) - 1 = 6y - 4$$

En definitiva la ecuación implícita pedida es:

$$x - 3y + 2 = 0.$$

(ii) *Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.*

El ángulo que forman las rectas es el mismo que forman sus vectores normales $\vec{n}_r = (0,1)$ y $\vec{n}_s = (1,-1)$:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s}{\|\vec{n}_r\|\|\vec{n}_s\|} = \frac{(0,1)\cdot(1,-1)}{\|(0,1)\|\|(1,-1)\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto:

$$\alpha = arcos\frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^o.$$

4.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.*

El centro de giro debe de equidistar de ambas rectas. Por tanto buscamos un punto $P = (a, 0)$ sobre la recta $y = 0$ que equidiste de las otras dos:

$$d(P, 3x-4y=0) = d(P, y+3=0) \iff \frac{|3a - 4\cdot 0|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|0+3|}{\sqrt{1^2+0^2}} \iff |a| = 5 \iff a = \pm 5.$$

Hay pos posibilidades. Tomamos una de ellas como centro $P = (5, 0)$.

Ahora para saber el ángulo de giro hallamos la proyección ortogonal A de P sobre la recta $3x - 4y = 0$ y la proyección ortogonal B de P sobre la recta $y + 3 = 0$.

El punto A cumple la ecuación de $3x - 4y = 0$ y así es de la forma $A = (4k, 3k)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal:

$$\frac{4k-5}{3} = \frac{3k-0}{-4} \iff k = 4/5.$$

Obtenemos $A = (16/5, 12/5)$ y $\vec{P}A = A - P = (-9/5, 12/5)$.

El punto B cumple la ecuación de $y + 3 = 0$ y así es de la forma $B = (m, -3)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal $(1, 0)$:

$$m - 5 = 0 \iff m = 5.$$

Obtenemos $B = (5, -3)$ y $\vec{P}B = A - P = (0, -3)$.

El ángulo de giro α es el que forman los vectore $\vec{P}A$ y $\vec{P}B$:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{P}A \cdot \vec{P}B}{\|\vec{P}A\|\|\vec{P}B\|} = \frac{-36/5}{9} = \frac{-4}{5}.$$

El sentido de giro coincide con la orientación de la base $\{\vec{P}A, \vec{P}B\}$ es decir con el signo del determinante de:

$$det\begin{pmatrix} -9/5 & 0 \\ 12/5 & -3 \end{pmatrix} = 27/5 > 0.$$

Por tanto:

$$sin(\alpha) = +\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = \frac{3}{5}.$$

En definitiva las ecuaciones del giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el ángulo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-5 \\ y \end{pmatrix}.$$

5.– *Dada la familia de curvas:*

$$x^2 + y^2 = (sy + q)^2$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de s y q.*

Desarrollamos la ecuación de la cónica:

$$x^2 + y^2 = s^2y^2 + 2sqy + q^2 = 0 \iff x^2 + (1 - s^2)y^2 - 2sqy - s^2 = 0.$$

La matriz asociada A y de términos cuadráticos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^2 & -sq \\ 0 & -sq & -q^2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-s^2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los determinantes:

$$det(A) = -q^2, \qquad det(T) = 1 - s^2.$$

El tipo de cónica depende del signo de los determinantes. Para formar la tabla de casos estudiamos cuando se anulan:

$$det(A) = 0 \iff q = 0, \qquad det(T) = 0 \iff s = \pm 1.$$

Por tanto distinguimos los siguientes casos:

	$q = 0$	$q \neq 0$
$s < -1$	$\|T\| < 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow$ rectas reales cortándose	$\|T\| < 0$, $\|A\| < 0 \Rightarrow$ hipérbola
$s = -1$	$\|T\| = 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow$ recta doble (*)	$\|T\| = 0$, $\|A\| < 0 \Rightarrow$ parábola
$-1 < s < 1$	$\|T\| > 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow$ rectas imaginarias cortándose	$\|T\| > 0$, $\|A\| < 0 \Rightarrow$ elipse
$s = 1$	$\|T\| = 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow$ rectas doble (*)	$\|T\| = 0$, $\|A\| < 0 \Rightarrow$ parábola
$s > 1$	$\|T\| < 0$, $\|A\| = 0 \Rightarrow$ rectas reales cortándose	$\|T\| < 0$, $\|A\| < 0 \Rightarrow$ hipérbola

En los casos marcandos con (*) sabemos que se trata de una recta doble por que la matriz de la cónica A tiene rango 1.

(ii) *Para $s = 1$, $q = 1$ hallar el/los foco/focos de la cónica.*

Según vimos en el apartado anterior para $p = q = 1$ la cónica es una parábola. Para hallar el foco calculamos la ecuación reducida y las ecuaciones de cambio de referencia. Las matrices asociada y de términos cuadráticos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que T ya es diagonal sus autovalores y autovectores son:

$$\lambda_1 = 1 \text{ con autovalor asociado } (1,0)$$
$$\lambda_2 = 0 \text{ con autovalor asociado } (0,1)$$

La ecuación reducida es:

$$\lambda_1 x''^2 + 2dy'' = 0$$

con $d = -\sqrt{-|A|/\lambda_1} = -1$. Queda:

$$x''^2 - 2y'' = 0 \iff x''^2 = 2y''$$

De forma que el parámetro $p = 1$.

Para la ecuación de cambio de referencia comprobamos que el sentido del autovector asociado al 0 está bien elegido:

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 < 0 \text{ CORRECTO}$$

Necesitamos además el vértice que es la intersección de la cónica y el eje. Éste es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo:

$$(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff x = 0.$$

Intersecamos eje y cónica:

$$x = 0, \qquad x^2 + y^2 = (y+1)^2$$

Resolviendo obtenemos el vértice $(0, -1/2)$.

En definitiva las ecuaciones de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El foco en la nueva referencia es $(0, p/2) = (0, 1/2)$ y en la referencia de partida:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Para $s = 2$, $q = 1$ hallar la excentricidad de la cónica.*

En este caso la cónica es una hipérbola. Para hallar la excentricidad basta hallar la ecuación reducida en la forma:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Para hallar la ecuación reducida comenzamos escribiendo las matrices asociada y cuadrática de la cónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de T son 1 y -3. Dado que $|A| = -1 < 0$ tomamos como $\lambda_1 = -3$ el autovalor negativo y $\lambda_2 = 1$. La ecuación reducida es:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0 \qquad \text{donde} \qquad d = \frac{|A|}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{3}.$$

Queda:

$$-3x''^2 + y''^2 + \frac{1}{3} = 0 \iff 9x''^2 - 3y''^2 = 1 \iff \frac{x''^2}{1/9} - \frac{y''^2}{1/3} = 1.$$

Vemos que $a = 1/3$ y $b = 1/\sqrt{3}$ y la excentricidad es:

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}}}{\dfrac{1}{3}} = 2.$$

6.– *Hallar la ecuación de una cónica con un foco en el punto* $(0,0)$*, centro* $C=(1/2,1/2)$ *y excentricidad* $e=\sqrt{2}/2$*.*

Como la excentricidad es menor que uno, se trata de una elipse. Teniendo en cuenta que ésta es simétrica respecto al centro podemos calcular el segundo foco. Si $F_1=(0,0)$ entonces:

$$\frac{F_1+F_2}{2}=C \iff F_2=2C-F_1=(1,1).$$

Conocidos los dos focos usamos la caracterización geométrica de la elipse como lugar geométrico cuya suma de distancias a los focos es constante:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a.$$

Para hallar a usamos la excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow a=\frac{c}{e}=\frac{d(C,F)}{e}=1.$$

La ecuación será entonces:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2\cdot 1.$$

Operando:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=4+x^2+y^2-4\sqrt{x^2+y^2} \iff 2\sqrt{x^2+y^2}=x+y+1$$

Finalmente elevando de nuevo al cuadrado y agrupando términos queda:

$$3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0.$$

7.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2-8z^2+4xy+2xz-8yz+8y+8z+2=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

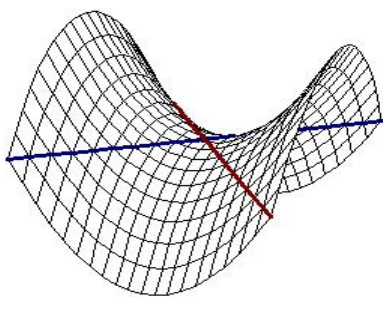
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&0&-4&4\\1&-4&-8&4\\0&4&4&2\end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, cambiada por otra o multiplicada por un número:

$$A\xrightarrow{H_{21}(-2)}\xrightarrow{H_{31}(-1)}\xrightarrow{\mu_{21}(-2)}\xrightarrow{\mu_{31}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-4&-6&4\\0&-6&-9&4\\0&4&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{H_{32}-3/2}\xrightarrow{H_{42}(1)}\xrightarrow{\mu_{32}-3/2}\xrightarrow{\mu_{42}(1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&-2&6\end{pmatrix}$$

No se pude seguir la diagonalización sin utilizar la última fila. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos que es $(+,-,0)$. Se trata por tanto de un paraboloide hiperbólico.



8.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si* $(1,2)$ *y* $(2,3)$ *son autovectores de una matriz* A *entonces ésta no es simétrica.*

FALSO. Basta tomar $A = Id$. Es simétrica y cualquier vector es autovector asociado al 1.

(ii) *Si* $(1,2)$ *y* $(2,3)$ *son autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz* A*, entonces ésta no es simétrica.*

VERDADERO. Si fuese simétrica autovectores asociados a autovalores distintos deberían de ser ortogonales con el producto escalar usual, pero $(1,2)\cdot(2,3) = 2+6 = 8 \neq 0$.

(iii) *Si* A *es una matriz simétrica no inversible de rango* 5 *con sólo dos autovalores distintos entonces al menos uno de ellos tiene multiplicidad algebraica* 5.

VERDADERO. Una matriz simétrica tiene todos sus autovalores reales y siempre diagonaliza por semejanza. Si es no inversible, el cero es autovalor. Como sólo tiene dos autovalores distintos tiene un segundo autovalor no nulo. En la forma diagonal el rango de la matriz coincide con el número de veces que este aparece en la diagonal, es decir, con su multiplicidad algebraica. Como el rango es 5 su multiplicidad algebraica también vale 5.

(iv) *Si* $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *simétrica es una matriz de giro respecto a una base ortonormal, entonces el ángulo de giro necesariamente es de cero grados.*

FALSO. Una matriz de giro respecto a una base ortonormal es de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Si es simétrica entonces $sin(\alpha) = 0$ y por tanto $cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - sin(\alpha)^2} = \pm 1$. Si $cos(\alpha) = -1$ el giro es de 180^o y no de cero grados.