Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **26 de mayo de 2014**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que:

- $B = \{(1,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$ es una base de vectores conjugados.
- $(1,2,3)$ es autoconjugado, $(1,0,1) \in ker(w)$ y $w(2,1,0) = 3$.

(i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Si f es la forma polar asociada a w calcular $f((1,1,0),(0,1,1))$.

(iv) Hallar, si existe, una base B' tal que la matriz asociada a w en tal base sea:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.4 puntos)

2.– Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio euclideo con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica. Se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right).$$

(i) Probar que t es una transformación ortogonal.

(ii) Describir geométricamente la transformación t.

(iii) Dada la recta r de ecuaciones $x + y = 0, \quad z = 0$, hallar las ecuaciones de la recta que se obtiene al aplicarle el endomorfismo t a r.

(1.3 puntos)

3.– En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y - 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.

(ii) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.

(1.2 puntos)

4.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.

(1.5 puntos)

5.– Dada la familia de curvas:

$$x^2 + y^2 = (sy + q)^2$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de s y q.

(ii) Para $s = 1$, $q = 1$ hallar el/los foco/focos de la cónica.

(iii) Para $s = 2$, $q = 1$ hallar la excentricidad de la cónica.

(1.6 puntos)

6.– Hallar la ecuación de una cónica con un foco en el punto $(0,0)$, centro $C = (1/2, 1/2)$ y excentricidad $e = \sqrt{2}/2$.

(1.2 puntos)

7.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

8.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $(1,2)$ y $(2,3)$ son autovectores de una matriz A entonces ésta no es simétrica.

(ii) Si $(1,2)$ y $(2,3)$ son autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz A, entonces ésta no es simétrica.

(iii) Si A es una matriz simétrica no inversible de rango 5 con sólo dos autovalores distintos entonces al menos uno de ellos tiene multiplicidad algebraica 5.

(iv) Si $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica es una matriz de giro respecto a una base ortonormal, entonces el ángulo de giro necesariamente es de cero grados.

(1.2 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **26 de maio 2014**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera unha forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que:

- $B = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ é unha base de vectores conxugados.
- $(1,2,3)$ é autoconxugado, $(1,0,1) \in ker(w)$ y $w(2,1,0) = 3$.

(i) Atopar a matriz asociada a w respecto da base canónica.

(ii) Clasificar a forma cuadrática indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Se f é a forma polar asociada a w calcular $f((1,1,0),(0,1,1))$.

(iv) Atopar, se existe, unha base B' tal que a matriz asociada a w en tal base sexa:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.4 puntos)

2.– Sea $\mathbb{R}^3$ o espazo euclideo co producto escalar usual e a orientación positiva dada pola base canónica. Se considera o endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

(i) Probar que t é unha transformación ortogonal.

(ii) Describir xeométricamente a transformación t.

(iii) Dada a recta r de ecuacions $x + y = 0, \quad z = 0$, atopar as ecuacions da recta que se obtén aplicando o endomorfismo t a r.

(1.3 puntos)

3.– No plano afín se sexan as rectas $r \equiv y - 1 = 0$ e $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza unha recta l perpendicular a s pasando por P. Sexa Q o punto de corte de r e l.

(i) Calcular l ecuación implícita do lugar xeométrico de puntos medios de P e Q.

(ii) Atopar o ángulo que forman as rectas r e s.

(1.2 puntos)

4.– No plano afín atopar as ecuacions dun xiro que leve a recta $3x - 4y = 0$ na recta $y + 3 = 0$ e esté centrado nun punto da recta $y = 0$.

(1.5 puntos)

5.– Dada a familia de curvas:

$$x^2 + y^2 = (sy + q)^2$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de s e q.

(ii) Para $s = 1$, $q = 1$ atopar o/os foco/focos da cónica.

(iii) Para $s = 2$, $q = 1$ atopar a excentricidade da cónica.

(1.6 puntos)

6.– Atopar a ecuación dunha cónica cun foco no punto $(0, 0)$, centro $C = (1/2, 1/2)$ e excentricidade $e = \sqrt{2}/2$.

(1.2 puntos)

7.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)

8.– Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacions.

(i) Se $(1, 2)$ e $(2, 3)$ son autovectores dunha matriz A entonces ésta non é simétrica.

(ii) Se $(1, 2)$ e $(2, 3)$ son autovectores asociados a autovalores distintos dunha matriz A, entonces ésta non é simétrica.

(iii) Se A es unha matriz simétrica non inversible de rango 5 con sólo dous autovalores distintos entonces polo menos un deles ten multiplicidade alxebraica 5.

(iv) Se $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica é unha matriz de xiro respecto a unha base ortonormal, entonces o ángulo de xiro necesariamente é de cero grados.

(1.2 puntos)
