Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **14 de julio de 2014**

1.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Una forma cuadrática definida positiva nunca tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Una forma cudrática w definida positiva cumple que:

$$w(\vec{u}) > 0 \qquad \forall \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Si $\vec{u}$ es autoconjugado entonces $w(\vec{u}) = 0$ y por tanto necesariamente es el vector nulo.

(ii) *La matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa siempre tiene determinante negativo.*

FALSO. Basta tomar la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada $-Id$. Su determinante es 1 y su signatura $(0, 2)$. Por tanto es definida negativa y tiene determinante positivo.

(iii) *Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Si es indefinida existe una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ respecto a la cual la matriz asociada A es diagonal, con algún término igual a 1 y otro igual a -1, en particular si $a_{ii} = 1$ y $a_{jj} = -1$ entonces:

$$w(\vec{u}_i + \vec{u}_j) = 1^2 \cdot a_{ii} + 1^2 \cdot a_{jj} = 0$$

y por tanto $\vec{u}_i + \vec{u}_j$ es autoconjugado no nulo.

(iv) *La suma de una forma cuadrática indefinida y una definida positiva nunca es definida negativa.*

VERDADERO. Sea w_1 indefinida y w_2 definida positiva. Por ser w_1 indefinida existe un vector $\vec{u}$ no nulo tal que $w_1(\vec{u}) > 0$. Por ser w_2 definida positiva $w_2(\vec{u}) > 0$ y por tanto:

$$(w_1 + w_2)(\vec{u}) = w_1(\vec{u}) + w_2(\vec{u}) > 0$$

y así $w_1 + w_2$ no es definida negativa.

(1.2 puntos)

2.– *Dada la forma bilineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + xz' + x'z + 4zz'$$

(a) *Probar que f define un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar la forma bilineal ha de ser simétrica y definida positiva. Para analizarlo escribimos la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La forma bilineal es simétrica por que la matriz asociada lo es también.

Para comprobar que es definida positiva, la diagonalizamos por congruencia. La forma reducida ha de tener todos los términos de la diagonal positivos:

$$F_C \longrightarrow \overset{H_{31}(-1)}{\underset{}{\xrightarrow{H_{21}(-1)}}} \overset{H\mu_{31}(-1)}{\xrightarrow{\mu_{21}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(3, 0)$ y así f es definida positiva.

(b) *Con el producto escalar definida por f:*

(i) *Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.*

Una base B ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz asociada es la identidad. Completamos la simplificación por congruencia hecha en el apartado anterior, hasta llegar a la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_3(1/\sqrt{2})\mu_3(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos las mismas operaciones columna que hemos aplicado en la reducción sobre la identidad, para obtener la matriz de cambio de la base ortonormal a la canónica. Las columnas de esta matriz serán los vectores de la base pedida:

$$Id \overset{\substack{H\mu 31(-1) \\ \mu_{21}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_3(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Una base ortonormal es por tanto:

$$B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

(ii) *Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 0, 1)$ sobre el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$.*

Sea $\vec{u} = (1, 0, 1)$. Las ecuaciones paramétricas del plano U son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a$$

y sus vectores directores $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 0)$.

Por tanto la proyección buscada es un vector $\vec{u}'$ de la forma $\vec{u}' = (a, b, -a)$. Tiene que cumplirse:

$$\vec{u} - \vec{u}' \perp (1, 0, -1) \Rightarrow (1 - a, -b, 1 + a) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a & b & 1 + a \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\vec{u} - \vec{u}' \perp (0, 1, 0) \Rightarrow (1 - a, -b, 1 + a) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a & b & 1 + a \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Operando se obtienen las ecuaciones:

$$b - 3 - 3a = 0, \qquad 1 - a + 2b + 2 + 2a = 0.$$

Y resolviendo: $a = -\frac{3}{5}$ y $b = \frac{6}{5}$. La proyección pedida es:

$$\vec{u}' = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}).$$

(1.3 puntos)

3.– *En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:*

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

(i) Hallar los valores de a, b para que t sea una transformación ortogonal.

La matriz asociada al endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para que sea una transformación ortogonal ha de cumplirse:

$$T_C^t T_C = Id.$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad 2ab = 0.$$

De la segunda ecuación deducimos que $a = 0$ ó $b = 0$. Y combinado con la primera tenemos cuatro casos:

CASO I. $a = 0$ y $b = 1$.

CASO II. $a = 0$ y $b = -1$.

CASO III. $a = 1$ y $b = 0$.

CASO IV. $a = -1$ y $b = 0$.

(ii) *Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geométricamente.*

En cada caso el determiante indica el tipo de transformación ortogonoal (giro, si vale 1 ó giro compuesto con una simetría respecto a un plano si es -1). Tenemos:

$$det(T_C) = b^2 - a^2.$$

CASO I. $a = 0$ y $b = 1$.

Se tiene que $det(T_C) = 1$. Se trate de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = -1$. De donde $cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_c - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x + z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1, 0, 1)$.

En definitiva se trta de un giro de 180^o respecto al semieje generador por el vector $(1, 0, 1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1, 0, 1)$.

CASO II. $a = 0$ y $b = -1$.

Se tiene que $det(T_C) = 1$. Se trate de nuevo de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = -1$. De donde $cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_c - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x - z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1, 0, -1)$.

En definitiva se trta de un giro de 180^o respecto al semieje generador por el vector $(1, 0, -1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1, 0, -1)$.

CASO III. $a = 1$ y $b = 0$.

Se tiene que $det(T_C) = -1$. Se trate de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = 1$. De donde $cos(\alpha) = 1$ y $\alpha = 0^o$.

Dado que el ángulo es de cero grados, en realida simplemente es una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio de autovectores asociados al 1:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$$

Es una simetría respecto al plano $y = 0$.

CASO IV. $a = -1$ y $b = 0$.

Se tiene que $det(T_C) = -1$. Se trate de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = -3$. De donde $cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1:

$$(T_c - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff 0 = 0.$$

Es decir el espacio de autovectores asociados al -1 es todo $\mathbb{R}^3$. Puede tomarse cualquier vector como semieje, por ejemplo, $(1, 0, 0)$. Se trata por tanto de un giro de 180^o y semieje generado por $(1, 0, 0)$ compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal a tal vector, el plano YZ.

Obervación: En realidad en este caso la matriz asociada es $-Id$. Directamente se deduce que es una simetría respecto al origen.

(1.5 puntos)

4.– *En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:*

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

(i) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $x + z = 0$, para que el triángulo ABC sea equilátero.*

Por ser ABC un triángulo equilátero, las coordenadas (a, b, c) de C deben de equidistar de A y C:

$$d(A, C) = d(B, C) \iff \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando se obtiene $a + b + c = 3$.

Análogamente A tiene que equidistar de B y C:

$$d(A, B) = d(A, C) \iff \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2}$$

Simplificando queda $a^2 + b^2 + c^2 = 12$.

Finalmente las coordenadas de C tienen que cumplir la ecuación del plano $x + z = 0$, es decir, $a + c = 0$.

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} 3 &= a + b + c \\ 12 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ 0 &= a + c \end{aligned} \right.$$

De la primera y tercera ecuación se obtiene $b = 3$. Sustituyendo en la segunda y teniendo en cuenta la tercera queda:

$$3 = 2a^2$$

De donde $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ y $c = -a$. Se obtienen así dos posibles soluciones:

$$C = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3, \frac{\sqrt{6}}{2}) \text{ ó } C = (\frac{\sqrt{6}}{2}, 3, -\frac{\sqrt{6}}{2}).$$

(ii) *Calcular el área del triángulo ABC.*

El área es:

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{AC} \times AB\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \pm\sqrt{6}/2 & 3 & \mp\sqrt{6}/2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\|(6 \pm \sqrt{6}, \pm 2\sqrt{6}, \pm\sqrt{6} - 6)\| = \frac{1}{2}\sqrt{108} = 3\sqrt{3}.$$

También podría usarse que el área de un triángulo equilátro de lado l es:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

En nuestro caso $l = d(A, B) = \sqrt{12}$ y así:

$$A = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

(iii) *Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto A en el punto B y cuadriplique el área del triángulo.*

Dado que cuadriplica el área la razón k de la homotecia cumple $k^2 = 4$ y así $k = \pm 2$. Si O es el centro de la homotecia la ecuación de la misma es:

$$t(X) = O + k(X - O)$$

Dado que lleva el punto A sobre el B:

$$B = O + k(A - O) \iff B - kA = (1 - k)O$$

De donde:

$$O = \frac{B - kA}{1 - k}$$

Si $k = 2$ entonces $O = \frac{(2, 2, 2)}{1 - 2} = (-2, -2, -2)$ y la ecuación de la homotecia queda:

$$t(x, y, z) = (-2, -2, -2) + 2(x + 2, y + 2, z + 2).$$

Si $k = -2$ entonces $O = \frac{(2, 2, 2)}{1 + 2} = (2/3, 2/3, 2/3)$ y la ecuación de la homotecia queda:

$$t(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - 2(x - \frac{2}{3}, y - \frac{2}{3}, z - \frac{2}{3}).$$

(1.5 puntos)

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera la referencia canónica* R *y la referencia* $R' = \{(1,0,1);(1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\}$*. Denotamos respectivamente por* (x,y,z) *y* (x',y',z') *a las coordenadas de un punto respecto a la referencias* R *y* R'*. Hallar las ecuaciones del plano* $x+y-2z+1=0$ *en la referencia* R'*.*

Las ecuaciones de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación del plano puede escribirse como:

$$(\,1 \quad 1 \quad -2\,) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Sustituimos usando la ecuación de cambio de referencia:

$$(\,1 \quad 1 \quad -2\,) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) + 1 = 0.$$

Operando queda:

$$-1 + (\,2 \quad 0 \quad 1\,) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 1 = 0$$

y simplificando:

$$2x' + z' = 0.$$

(1 punto)

6.– *Hallar la ecuación de una cónica que tiene por eje la recta* $x-2y=0$*, es tangente a* $x=3$ *y pasa por los puntos* $(3,1)$ *y* $(4,1)$*.*

Dado que es tangente a $x=3$ y pasa por $A=(3,1)$ (que cumple la ecuación de esa recta) el punto de tangencia es precisamente A. Entonces:

- Usando el eje y por simetría obtendremos una segunda tangente y un segundo punto de tangencia.

- Construiremos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

- Impondremos que la cónica buscada pase por $(-2,1)$.

El simétrico del punto $A(3,1)$ respecto de la recta $x-2y=0$ es un punto $A'(a,b)$ tal que:

- El vector $\vec{A}A' = (a-3, b-1)$ es perpendicular al eje de simetría o equivalentemente paralelo a su vector normal:

$$\frac{a-3}{1} = \frac{b-1}{-2} \iff 2a+b-7=0.$$

- El punto medio de A y A' pertenece al eje $x-2y=0$:

$$\frac{3+a}{2} - 2 \cdot \frac{b+1}{2} = 0 \iff a-2b+1=0.$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones se obtiene $A' = (\frac{13}{5}, \frac{9}{5})$.

La intersección B de la tangente dada con el eje es:

$$\begin{cases} 0 = x-2y \\ 0 = x-3 \end{cases} \iff B = (x,y) = (3, \frac{3}{2}).$$

El simétrico de la tangente es la recta que une A' y B:

$$\frac{x-\dfrac{13}{5}}{3-\dfrac{13}{5}}=\frac{y-\dfrac{9}{5}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{5}} \iff 3x+4y-15=0.$$

Formamos el haz descrito anteriormente. La primera cónica es el producto de la dos tangentes:

$$(x-3)(3x+4y-15)=0$$

La segunda es la recta doble que une los puntos de tangencia $(3,1)$ y $(13/5, 9/5)$:

$$\frac{x-3}{\dfrac{13}{5}-3}=\frac{y-1}{\dfrac{9}{5}-1} \iff 2x+y-7=0.$$

El haz resulta:

$$\lambda(x-3)(3x+4y-15)+(2x+y-7)^2=0$$

Imponemos que pase por el punto $(4,1)$:

$$\lambda(4-4)(3\cdot 4+4\cdot 1-15)+(2\cdot 4+1-7)^2=0 \iff \lambda=-4.$$

La cónica pedida tiene por ecuación:

$$(2x+y-7)^2-4(x-3)(3x+4y-15)=0$$

Simplificando:

$$8x^2+12xy-y^2-34y-68x+131=0.$$

(1.4 puntos)

7.– *Dada la curva plana de ecuación* $2x^2-5xy+2y^2-4x+5y=0$*:*

(i) *Clasificarla y dar su ecuación reducida.*

Las matrices asociadas y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 2 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por comodidad, para evitar las fracciones, multiplicamos ambas por dos sin que por ello dejen de representar la misma cónica:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ -5 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(T)=-9$ y $det(A)=36$. Por tanto se trata de una hipérbola.

Para hallar la ecuación reducida calculamos los autovalores de T:

$$det(T-\lambda Id)=0 \iff (4-\lambda)^2-5^2=0 \iff (9-\lambda)(-1-\lambda)=0.$$

Los autovalores son $\lambda_1=9$ y $\lambda_2=-1$. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+d=0$$

donde $d = \dfrac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2} = -4$. Queda:

$$9x''^2 - y''^2 - 4 = 0.$$

O equivalentemente:

$$\frac{x''^2}{4/9} - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

(ii) *Hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad de la cónica.*

El centro:

Es el punto (p,q) verificando:

$$(p,q,1)A = (0,0,h)$$

donde h puede tomar cualquier valor. Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4p - 5q - 4 = 0, \qquad -5p + 4q + 5 = 0.$$

Y resolviendo:

$$(p,q) = (1,0).$$

Ejes:

Son las rectas polares de los autovectores de la matriz T asociados a autovalores no nulos. Calculamos primero tales autovectores:

Asociado a $\lambda_1 = 9$:

$$(T - 9Id)(x,y)^t = (0,0) \iff -5x - 5y = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 = (1,-1)$$

Asociado a $\lambda_2 = -1$:

$$(T + Id)(x,y)^t = (0,0) \iff 5x - 5y = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = (1,1)$$

Los correspondientes ejes son sus rectas polares:

$$(1,-1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff 9x - 9y - 9 = 0 \iff x - y - 1 = 0$$
$$(1,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff -x - y + 1 = 0 \iff x + y - 1 = 0$$

Asíntotas:

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asintóticas. Éstas corresponden a vectores (p,q) verificando:

$$(p,q)T(p,q)^t = 0 \iff 4p^2 - 10pq + 4q^2 = 0 \iff 2p^2 - 5pq + 2q^2 = 0.$$

Resolviendo:

$$p = \frac{5q \pm \sqrt{25q^2 - 16q^2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}q$$

De donde $p = 2q$ ó $q = 2p$. Obtenemos las dirreciones $(2,1)$ y $(1,2)$.

Las correspondientes asíntotas son las rectas polares de estas direcciones:

$$(2,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff 3x - 6y - 3 = 0 \iff x - 2y - 1 = 0$$
$$(1,2,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff -6x + 3y + 6 = 0 \iff 2x - y - 2 = 0$$

Excentricidad.

Si la hipérbola tiene por ecuación reducida:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

la excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

En nuestro caso teníamos la ecuación:

$$\frac{x''^2}{4/9} - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

De donde $a = \sqrt{4/9} = 2/3$ y $b = \sqrt{4} = 2$. Así la excentricidad queda:

$$e = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}+4}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{10}.$$

(1.5 puntos)

8.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 16yz - 12y + 12z + 3 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuárica es:

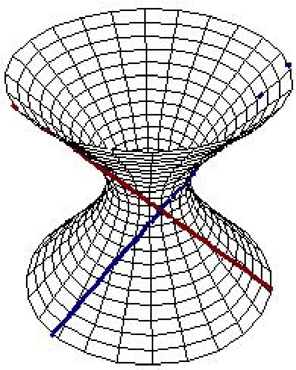
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & -6 \\ 2 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia usando operaciones elementales (las mismas por fila que por columna), con la salvedad de que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{H_{31}(-2)}\xrightarrow{\mu_{21}(-1)}\xrightarrow{\mu_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(5)}\xrightarrow{H_{42}(3)}\xrightarrow{\mu_{32}(5)}\xrightarrow{\mu_{42}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -24 \\ 0 & 0 & -24 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{43}(-12/25)}\xrightarrow{\mu_{43}(-12/25)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -87/250 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(+,+,-,-)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de una hoja.



(0.6 puntos)
