

1.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Una forma cuadrática definida positiva nunca tiene vectores autoconjugados no nulos.
- (ii) La matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa siempre tiene determinante negativo.
- (iii) Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.
- (iv) La suma de una forma cuadrática indefinida y una definida positiva nunca es definida negativa.

(1.2 puntos)

2.— Dada la forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + xz' + x'z + 4zz'$$

- (a) Probar que f define un producto escalar.
- (b) Con el producto escalar definida por f :
 - (i) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
 - (ii) Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 0, 1)$ sobre el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

(1.3 puntos)

3.— En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

- (i) Hallar los valores de a, b para que t sea una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geométricamente.

(1.5 puntos)

4.— En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

- (i) Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $x + z = 0$, para que el triángulo ABC sea equilátero.
- (ii) Calcular el área del triángulo ABC .
- (iii) Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto A en el punto B y cuadriplique el área del triángulo.

(1.5 puntos)

5.− En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera la referencia canónica R y la referencia

$$R' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Denotamos respectivamente por (x, y, z) y (x', y', z') a las coordenadas de un punto respecto a la referencias R y R' . Hallar las ecuaciones del plano $x + y - 2z + 1 = 0$ en la referencia R' .

(1 punto)

6.− Hallar la ecuación de una cónica que tiene por eje la recta $x - 2y = 0$, es tangente a $x = 3$ y pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(4, 1)$.

(1.4 puntos)

7.− Dada la curva plana de ecuación $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 0$:

- (i) Clasificarla y dar su ecuación reducida.
- (ii) Hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad de la cónica.

(1.5 puntos)

8.− Dada la cuádrlica de ecuación:

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 16yz - 12y + 12z + 3 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

1.— Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmacións:

- (i) Unha forma cuadrática definida positiva nunca ten vectores autoconxugados non nulos.
- (ii) A matriz asociada a unha forma cuadrática definida negativa sempre ten determinante negativo.
- (iii) Unha forma cuadrática indefinida sempre ten vectores autoconxugados non nulos.
- (iv) A suma dunha forma cuadrática indefinida e unha definida positiva nunca é definida negativa.

(1.2 puntos)

2.— Dada a forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + xz' + x'z + 4zz'$$

- (a) Probar que f define un produto escalar.
- (b) Co produto escalar definida por f :
 - (i) Atopar unha base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
 - (ii) Atopar a proxección ortogonal do vector $(1, 0, 1)$ sobre o subespazo $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

(1.3 puntos)

3.— No espazo euclideo $\mathbb{R}^3$ co produto escalar usual e a orientación positiva dada pola base canónica, para cada par de números reais $a, b \in \mathbb{R}$ se considera o endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

- (i) Atopar os valores de a, b para que t sexa unha transformación ortogonal.
- (ii) Para cada un dos casos determinados no apartado anterior, clasificar a transformación describíndoa xeométricamente.

(1.5 puntos)

4.— No espazo afín euclideo co produto escalar usual e respecto á referencia canónica se consideran os puntos:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

- (i) Atopar as coordenadas dun punto C no plano $x + z = 0$, para que o triángulo ABC sexa equilátero.
- (ii) Calcular a área do triángulo ABC .
- (iii) Calcular a ecuación dunha homotecia que leve o punto A no punto B e cuadriplique a área do triángulo.

(1.5 puntos)

5.— No espazo afín se considera a referencia canónica R e a referencia

$$R' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Denotamos respectivamente por (x, y, z) e (x', y', z') ás coordenadas dun punto respecto ás referencias R e R' . Atopar as ecuacións do plano $x + y - 2z + 1 = 0$ na referencia R' .

(1 punto)

6.— Atopar a ecuación dunha cónica que ten por eixo a recta $x - 2y = 0$, é tanxente a $x = 3$ e pasa polos puntos $(3, 1)$ e $(4, 1)$.

(1.4 puntos)

7.— Dada a curva plana de ecuación $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 0$:

(i) Clasifícala e dar a súa ecuación reducida.

(ii) Atopar o centro, os eixos, as asíntotas e a excentricidade da cónica.

(1.5 puntos)

8.— Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 16yz - 12y + 12z + 3 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)