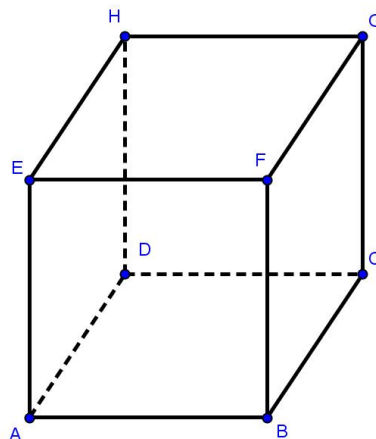


1.— En el espacio afín E_3 consideramos el cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H ,



donde:

$$A = (0, 0, 0), \quad D = (5, 0, 0), \quad G = (5, 7, 1).$$

(i) Calcular el área y el volumen del cubo.

Si el lado de un cubo mide L unidades su superficie y volumen son respectivamente:

$$S = 6 \cdot L^2, \quad V = L^3.$$

La longitud de la arista del cubo dado es la distancia entre dos lados adyacentes:

$$L = d(A, D) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 5.$$

Por tanto:

$$S = 6 \cdot 5^2 = 150, \quad V = 5^3 = 125.$$

(ii) Hallar las coordenadas de los ocho vértices del cubo.

Utilizaremos dos hechos:

i) Los vértices H y C se encuentran en el plano π_1 perpendicular a la arista AD y pasando por g .

ii) La distancia de los vértices H y C a D y G es la longitud de la arista del cubo; en el apartado (i) hemos visto que tal longitud es 5.

Calculamos entonces el plano π_1 . Su vector normal es el vector $\vec{AD} = (5, 0, 0)$. Por tanto la ecuación del plano es de la forma:

$$5x + d = 0.$$

Imponemos que pase por el punto G :

$$5 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow d = -25.$$

El plano π_1 tiene por tanto por ecuación: $x - 5 = 0$.

Ahora sean (x_0, y_0, z_0) las coordenadas del vértice H (o el C). Sabemos que:

- $H \in \pi_1$, y por tanto; $x_0 = 5$.

- $d(H, D) = 5$ y por tanto $(x_0 - 5)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 25$.

- $d(H, G) = 5$ y por tanto $(x_0 - 5)^2 + (y_0 - 7)^2 + (z_0 - 1)^2 = 25$.

Como $x_0 = 5$ las dos últimas ecuaciones quedan:

$$y_0^2 + z_0^2 - 25 = 0$$

$$y_0^2 + z_0^2 - 14y_0 - 2z_0 + 25 = 0$$

Restando la primera de la segunda y simplificando:

$$7y_0 + z_0 - 25 = 0,$$

de donde $z_0 = 25 - 7y_0$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y_0^2 + (25 - 7y_0)^2 - 25 = 0 \iff 50y_0^2 - 350y_0 + 600 = 0 \iff y_0^2 - 7y_0 + 12 = 0.$$

Resolviendo:

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = 4 \text{ ó } 3.$$

Deducimos que hay dos posibilidades

$$H = (5, 4, -3), \quad C = (5, 3, 4)$$

ó

$$H = (5, 3, 4), \quad C = (5, 4, -3)$$

Si, según el dibujo, queremos que la base $\{\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH}\}$ tenga orientación positiva, esto sólo se cumple para $H = (5, 4, -3)$ y $C = (5, 3, 4)$.

Los vértices restantes se calculan fácilmente teniendo en cuenta el paralelismo de las aristas del cubo:

$$B = A + \vec{DC} = \dots = (0, 3, 4).$$

$$E = A + \vec{DH} = \dots = (0, 4, -3).$$

$$F = G + \vec{DA} = \dots = (0, 7, 1).$$

(iii) Hallar la ecuación del plano π_1 perpendicular a $\vec{AD}$ y pasando por G .

Lo hemos calculado en el apartado anterior:

$$\pi_1 \equiv x - 5 = 0.$$

(iv) Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano de ecuación $4y - 3z = 0$.

El eje de giro es la recta intersección de los dos planos:

$$x - 5 = 0, \quad 4y - 3z = 0.$$

Su ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (5, 0, 0) + \lambda(0, 3, 4).$$

El ángulo de giro es el ángulo que forman ambos planos; equivalentemente el ángulo que forman sus vectores normales:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 4, -3)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 4, -3)\|} = 0.$$

Vemos que son perpendiculares y por tanto el sentido de giro es indiferente (cualquiera de los dos posibles llevará el primer plano en el segundo).

Para construir las ecuaciones del giro tomamos un punto fijo del mismo, es decir, un punto del eje de giro. Por ejemplo $D = (5, 0, 0)$. Las ecuaciones del giro son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donde T_C es la matriz de giro respecto al semieje generado por $(0, 3, 4)$. Calculemos tal matriz. Tomamos una base ortonormal de la siguiente forma:

- El primer vector el semieje de giro normalizado.
- El segundo y tercero perpendiculares entre si, de norma uno y perpendiculares al primero.

Ahora dado que el semieje es la arista $\vec{DC}$, basta tomar como base ortogonal $\vec{DC}, \vec{DH}, \vec{DA}$. Operando y normalizando resulta:

$$B = \{(0, 3/5, 4/5), (0, 4/5, -3/5), (-1, 0, 0)\}.$$

En tal base la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la cambiamos de base a la canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} = T_B M_{CB}^t.$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

y $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$ por ser una matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

Operando las ecuaciones de giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -20 & 15 \\ 20 & 9 & 12 \\ -15 & 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(v) ¿Cuál es la imagen del punto $(5, 4, -3)$ por el giro anterior?

Basta aplicar las ecuaciones de giro obtenidas en el apartado (iv) al punto $(5, 4, -3)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -20 & 15 \\ 20 & 9 & 12 \\ -15 & 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
