Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Parcial

Formas bilineales y formas cuadráticas. (45 minutos) **26 de febrero de 2013**

1.– *En $\mathbb{R}^2$ consideramos la base $B = \{(1,1),(1,0)\}$. Sea $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya matriz asociada en la base B es:*

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) *Si $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma polar asociada a w calcular $f((x,y),(x',y'))$.*

Calcularamos primero la matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora teniendo en cuenta que la matriz asociada a la forma cuadrática es la misma que la matriz asociada a la forma polar:

$$f((x,y),(x',y')) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5xx' - 2xy' - 2x'y.$$

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados respecto a w.*

Diagonalizamos por congruencia la matriz obtenida en el apartado anterior:

$$F_C \overset{H_{21}(2/5)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(2/5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix} = F_{B'}.$$

Hallamos la matriz de paso $M_{CB'}$ realizando las mismas operaciones columna sobre la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(2/5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}.$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B' = \{(1,0),(2/5,1)\}.$$

(iii) *Clasificar la forma cuadrática, indicando su rango y signatura.*

En el apartado anterior hemos diagonalizado la forma cuadrátrica. En la diagonal aparece un elemento positivo y otro negativo. Por tanto $sign(w) = (1,1)$, $rango(w) = 1 + 1 = 2$. La forma cuadrátrica es indefinida no degenerada.

(iv) *Encontrar, si es posible, un vector autoconjugado no nulo.*

Respecto a la base B' calculada en (ii) la forma cuadrática es:

$$w((x',y')_{B'}) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} F_{B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5x'^2 - \frac{4}{5}y'^2.$$

Los vectores autoconjugados cumplen:

$$w((x', y')_{B'}) = 0 \iff 5x'^2 - \frac{4}{5}y'^2 = 0 \iff 5x'^2 - \frac{4}{5}y'^2 = 0 \iff x' = \pm\frac{2}{5}y'.$$

Por tanto el vector $(2, 5)_{B'}$ es autoconjugado y no nulo. Lo expresamos en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Y obtenemos el vector $(4, 5)$ autoconjugado pero no nulo.

(5 puntos)

2.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica y $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es su forma cuadrática asociada, entonces:*

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}(w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{v})).$$

Recordemos que $w(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$. Por tanto:

$$w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{w}) = f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) - f(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}).$$

Aplicando la bilinealidad de f queda:

$$w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) - (f(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v})).$$

Usando la simetría de f y simplificando:

$$w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{w}) = 4f(\vec{u}, \vec{v}).$$

Por tanto la afirmación es VERDADERA.

(ii) *Si $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ para todo $\vec{u} \in U$ entonces $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ para $\vec{u}, \vec{v} \in U$.*

FALSO. Cualquier forma bilineal antisimétrica cumple:

$$f(\vec{u}, \vec{u}) = -f(\vec{u}, \vec{u}) \quad \Rightarrow \quad 2f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{u}, \vec{u}) = 0.$$

Pero eso no quiere decir que sea una forma bilineal nula sobre cualquier para de vectores. Por ejemplo si tomamos:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y), (x', y')) = xy' - x'y,$$

Se tiene que para cualquier vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f((x, y), (x, y)) = xy - xy = 0.$$

Sin embargo:

$$f((1, 0), (0, 1)) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

(iii) *Una forma cuadrática no degenerada no tiene vectores autoconjugados no nulos.*

FALSO. Por ejemplo la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de matriz asociada respecto de la base canónica $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es no degenerada (porque la matriz asociada tiene rango $2 = dim(\mathbb{R}^2)$) y sin emabrgo:

$$w((1, 1)) = (1, 1)F_C(1, 1)^t = 1 - 1 = 0$$

y por tanto $(1,1)$ es un vector autoconjugado no nulo. Otro contraejemplo es la forma cuadrátrica del ejercicio 1.

(iv) *Una forma cuadrática semidefinida positiva siempre tiene vectores autoconjugados no nulos*

VERDADERO. Si es semidefinida positiva en una cierta base la matriz asociada es diagonal con algún cero en la misma. Por tanto es una matriz que no tiene rango máximo. Por tanto dado que $dim(ker(w)) = dim(V) - rango(w)$, el núcelo tiene dimensión mayor que cero, es decir, hay vectores no nulos en el núcleo. Y todo vector del núcleo es autoconjugado.

(v) *La suma de dos formas cuadráticas indefinidas nunca es definida positiva.*

FALSO. Si consideramos por ejemplo las formas cuadráticas w_1, w_2 definidas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto a la base canónica respectivamente:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

son indefinidas (en su forma diagonalizada aparecen términos positivos y negativos en la diagonal). Sin embargo la matriz asociada a la forma cuadrátrica suma es:

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva.

(5 puntos)