

- 1.— En $\mathbb{R}^2$ consideramos la base $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$. Sea $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya matriz asociada en la base B es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Si $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma polar asociada a w calcular $f((x, y), (x', y'))$.
- (ii) Hallar una base de vectores conjugados respecto a w .
- (iii) Clasificar la forma cuadrática, indicando su rango y signatura.
- (iv) Encontrar, si es posible, un vector autoconjugado no nulo.

(5 puntos)

-
- 2.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si $f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica y $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ es su forma cuadrática asociada, entonces:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}(w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{v})).$$

- (ii) Si $f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ para todo $\vec{u} \in U$ entonces $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ para $\vec{u}, \vec{v} \in U$.
- (iii) Una forma cuadrática no degenerada no tiene vectores autoconjugados no nulos.
- (iv) Una forma cuadrática semidefinida positiva siempre tiene vectores autoconjugados no nulos
- (v) La suma de dos formas cuadráticas indefinidas nunca es definida positiva.

(5 puntos)

- 1.— En $\mathbb{R}^2$ consideramos a base $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$. Sexa $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unha forma cuadrática de matriz asociada na base B :

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Se $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma polar asociada a w calcular $f((x, y), (x', y'))$.
- (ii) Atopar unha base de vectores conxugados respecto a w .
- (iii) Clasificar a forma cuadrática, indicando o seu rango e a súa signatura.
- (iv) Atopar, se é posible, un vector autoconxugado non nulo.

(5 puntos)

-
- 2.— Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións:

- (i) Se $f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é unha forma bilineal simétrica e $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma cuadrática asociada, entón:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}(w(\vec{u} + \vec{v}) - w(\vec{u} - \vec{v})).$$

- (ii) Se $f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é unha forma bilineal tal que $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ para todo $\vec{u} \in U$ entón $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ para $\vec{u}, \vec{v} \in U$.
- (iii) Unha forma cuadrática non dexenerada non ten vectores autoconxugados non nulos.
- (iv) Unha forma cuadrática semidefinida positiva sempre ten vectores autoconxugados non nulos
- (v) A suma de dúas formas cuadráticas indefinidas nunca é definida positiva.

(5 puntos)
