Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **28 de mayo de 2013**

1.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y dado* $a \in \mathbb{R}$ *se considera la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z) = x^2 + 5ay^2 + 4z^2 + 2axy + 2ayz.$$

(i) *Clasificar* w *en función de los valores de* a *indicando además su rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos su matriz asociada por congruencia. Tal matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 5a & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizamos haciendo las mismas operaciones fila que columna:

$$A \overset{H_{21}(-a)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a - a^2 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & a & 5a - a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-a/4)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{23}(-a/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5a - 5a^2/4 \end{pmatrix}.$$

Clasificamos la forma cuadrática en función de los signos de la matriz diagonalizada. Para distinguir casos, analizamos para que valores de a se anulan:

$$5a - 5a^2/4 = 0 \iff a = 0 \text{ ó } a = 4.$$

- Si $a < 0$ los signos son $+,+,-$. Por tanto $sign(w) = (2,1)$, $rango(w) = 3$ y w es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 0$ los signos son $+,+,0$. Por tanto $sign(w) = (2,0)$, $rango(w) = 2$ y w es semidefinida positiva y degenerada.

- Si $0 < a < 4$ los signos son $+,+,+$. Por tanto $sign(w) = (3,0)$, $rango(w) = 3$ y w es definida positiva y no degenerada.

- Si $a = 4$ los signos son $+,+,-$. Por tanto $sign(w) = (2,0)$, $rango(w) = 2$ y w es semidefinida positiva y degenerada.

- Si $a > 4$ los signos son $+,+,-$. Por tanto $sign(w) = (2,1)$, $rango(w) = 3$ y w es indefinida y no degenerada.

(ii) *¿Para qué valores de* a *existen vectores no nulos autoconjugados?.*

Existen vectores autoconjugados no nulos cuando la forma cuadrática es indefinida o degenerada. En nuestro caso cuando $a \leq 0$ ó $a \geq 4$.

(iii) *Para* $a = 5$ *encontrar un vector* $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $w(\vec{u}) < 0$.

Cuando $a = 5$ la forma diagonal que hemos obtenido en (i) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -25/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto en cierta base B la expresión de la forma cuadrática es:

$$w((x', y', z')_B) = x'^2 + 4y'^2 - \frac{25}{4} z'^2.$$

Vemos que $w((0,0,1)_B) = -\dfrac{25}{4} < 0$. Para expresar el vector $(0,0,1)_B$ en la base canónica hallamos la base B, realizando sobre la identidad las mismas operaciones fila que hicimos para diagonalizar la forma cuadrática:

$$Id \overset{H_{21}(-5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-5/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -5/4 \end{pmatrix}.$$

La base B es entonces:

$$B = \{(1,0,0),(0,0,1),(-5,1,-5/4)\}$$

y así:

$$\vec{u} = (0,0,1)_B = 1 \cdot (-5, 1 - 5/4) = (-5,1,-5/4).$$

(iv) *Para $a = 2$:*

a) *Probar que w define un producto escalar.*

Una forma cuadrática define un producto escalar si y sólo sie es definida positiva. Pero hemos visto en el apartado (i) que si $0 < a < 4$ la forma cuadrática es defnida positiva. Por tanto para $a = 2$ define un producto escalar.

b) *Dar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$, tomando como producto escalar el definido por w.*

Construimos una base B' cuyo primer vector es el generador de U y los restantes ortogonales a este. La matriz del producto escalar que usaremos es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un vector (x,y,z) es orotogonal a $(1,0,0)$ si cumple:

$$(1,0,0)G(x,y,z)^t = 0 \iff x + 2y = 0.$$

Por tanto:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in R^3 | x + 2y = 0\} = \mathcal{L}\{(2,-1,0),(0,0,1)\}.$$

Considereamos la base:

$$B' = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,0,1)\}.$$

En tal base la matriz de la proyección pedida es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB}P_BM_{BC} = M_{CB}P_BM_{CB}^{-1},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.7 puntos)

2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales* $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *Se sabe que* f *es un giro de* 90 *grados y* g *un giro de* 30 *grados. Sean* A, B *las matrices asociadas respectivamente a* f *y* g *con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) $A \cdot B$ *es la matriz de una transformación ortogonal.*

VERDADERO. A y B son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen $A^tA = Id$ y $B^tB = Id$. Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir, $(AB)^t(AB) = Id$:

$$(AB)^t(AB) = (B^tA^t)AB = B^t(A^tA)B = B^tIdB = B^tB = Id.$$

(ii) $A \cdot B$ *es la matriz de un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una transformacióno ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como f y g son, por hipótesis, giros se cumple que $det(A) = det(B) = 1$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 1.$$

Y por tanto AB es la matriz de un giro.

(iii) $A \cdot B$ *es la matriz de un giro de* 120 *grados.*

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje $(1, 0, 0)$. La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(-30^o) & -sin(-30^o) \\ 0 & sin(-30^o) & cos(-30^o) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por $(-1, 0, 0)$ (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambial el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) *Si* f *y* g *tiene el mismo eje de giro,* $A \cdot B$ *es la matriz de un giro de* 120 *grados.*

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v) $A \cdot B$ *puede ser la matriz de un giro de* 60 *grados.*

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

(1.5 puntos)

3.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos* $A = (-1, 4)$ *y* $B = (1, 5)$ *respectivamente en* $A' = (3, 4)$ *y* $B' = (5, 3)$. *Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.*

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB'; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:

$$M_1 = \frac{A + A'}{2} = (1, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4, 0)$:

$$4x + d = 0.$$

Imponiendo que pase por M_1:

$$4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4.$$

Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB':

$$M_2 = \frac{B + B'}{2} = (3, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4, -2)$:

$$4x - 2y + c = 0.$$

Imponiendo que pase por M_2:

$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -4.$$

Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:

$$\left.\begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C = (x, y) = (1, 0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2, 4)$ en el vector $CA' = (2, 4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:

$$cos(\alpha) = \frac{(-2, 4) \cdot (2, 4)}{\|(-2, 4)\| \|(2, 4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2, 4), (2, 4)\}$:

$$signo(det(M_{CB})) = signo\left(det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = signo(-16) < 0.$$

Se trata por tanto de un giro de centro $(1, 0)$ y ángulo de giro:

$$\alpha = -arcos(3/5).$$

El seno del ángulo es por tanto:

$$sin(\alpha) = -\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = -4/5.$$

Las ecuaciones de giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

(1.5 puntos)

4.– *Dada la curva de ecuación*

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida.*

Las matrices asociada y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $|A| = 16, \quad |T| = -4$. Se trata por tanto de una hipérbola.

Para hallar la ecuación reducida calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = -1 \text{ ó } \lambda = 4.$$

Dado que $|A| > 0$ tomamos como primer autovalores el positivo:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = -1.$$

La ecuación reducida queda:

$$4x''^2 - y''^2 + d = 0, \quad d = \frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2} = -4.$$

Es decir:

$$4x''^2 - y''^2 - 4 = 0 \iff \frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

(ii) *Hallar el punto cuya recta polar es $x - 1 = 0$.*

Sea (a, b) el polo de la recta polar dada. Sabemos que:

$$(a, b, 1)A(x, y, 1)^t \text{ equivale a a la recta } x - 1 = 0.$$

Operando:

$$(2b - 2)x + (2a + 3b - 3)y + (-2a - 3b - 1) = 0 \text{ equivale a a la recta } x - 1 = 0.$$

Deducimos que:

$$2a + 3b - 3 = 0, \qquad \frac{2b - 2}{1} = \frac{-2a - 3b - 1}{-1}.$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$(a, b) = (-3, 3).$$

(iii) *Hallar los focos.*

De la ecuación reducida obtenida en el apartado 1 sabemos (con la notación usual) que $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. Por tanto:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5},$$

y los focos en la nueva referencia son:

$$F_1 = (\sqrt{5}, 0)_{R''}, \quad F_2 = (-\sqrt{5}, 0)_{R''}.$$

Resta pasarlos a la referencia de partida; para ello calculamos las fórmulas de cambio de referencia.

El centro es el punto (a, b) verificando:

$$(a, b, 1)A = (0, 0, h) \iff 2b - 2 = 0, \quad 2a + 3b - 3 = 0 \iff (a, b) = (0, 1).$$

Calculamos loa autovectores de T. Asociados a $\lambda_1 = 4$:

$$(T-4Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - y = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(1,2)\}$$

Asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(T+Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + 2y = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(2,-1)\}$$

Los autovectores normalizados resultan:

$$\frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \qquad \frac{(2,-1)}{\|(2,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1).$$

Y en definitiva la ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Cambiamos los focos de referencia:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Los focos resultan por tanto:

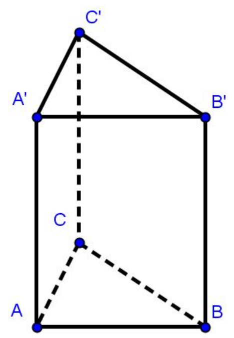
$$F_1 = (1,3), \qquad F_2 = (-1,-1).$$

(1.7 puntos)

5.– *En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices $ABCA'B'C'$. Se sabe que:*

$$A = (1,0,0), \quad B = (1,1,0), \quad C = (2,0,1), \quad Volumen = 2,$$

y que el plano $x = 0$ no corta al prisma.



(i) *Calcular el área del prisma.*

El área del prisma es el doble del área de la base más el área lateral. El área lateral es el perimétro del triángulo base por la altura.

El área de la base es:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\|AB \times AC\| = \frac{1}{2}\|(1,0,-1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

El perímetro de la base es:

$$P = \|AB\| + \|BC\| + \|AC\| = \|(0,1,0)\| + \|(1,-1,1)\| + \|(1,0,1)\| = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Y la altura:

$$h = \frac{volumen}{Area(ABC)} = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto el área del prisma es:

$$2Area(ABC) + P \cdot h = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4 = 4 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 13.1416\ldots.$$

(ii) *Calcular las coordenadas de los vértices A', B', C'. ¿Es única?.*

Para calcular las coordenadas de A', B', C' sumaremos a cada uno de los vértices A, B, C un vector ortogonal a la base y de norma la altura del prisma h calculada en el apartado anterior.

Un vector ortogonal a la base y de norma h se obtiene como:

$$\pm h \cdot \frac{AB \times AC}{\|AB \times AC\|} = \pm 2\sqrt{2} \cdot \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \pm(2,0,-2).$$

Podría haber por tanto dos posibilidaes para los vértices A', B', C':

$$A' = A + (2,0,-2) = (3,0,-2), \quad B' = B + (2,0,-2) = (3,1,-2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (4,0,-1),$$

ó

$$A' = A - (2,0,-2) = (-1,0,2), \quad B' = B - (2,0,-2) = (-1,1,2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (0,0,3).$$

Pero teniendo en cuenta que el plano $x = 0$ NO CORTA al prisma, no puede haber vértices con coordenada x de distinto signo (ya que en ese caso el segemento que los une cortarí a tal plano); por tanto la única posibilidad es la primera, en la cual, todas las abcisas de los puntos del prisma son positivas:

$$A' = A + (2,0,-2) = (3,0,-2), \quad B' = B + (2,0,-2) = (3,1,-2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (4,0,-1),$$

Deducimos por consiguiente que la solución es única.

(iii) *Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices A, B, C respectivamente en B, C, A. En caso afirmativo hallar el eje de giro.*

El giro debiera de llevar el segmento AB en el segmento BC. Pero:

$$\|AB\| = \|(0,1,0)\| = 1, \qquad \|BC\| = \|(1,-1,1)\| = \sqrt{3}.$$

Un giro debiera de conservar las distancias; como $\|AB\| \neq \|BC\|$ es imposible que exista un giro en las condiciones indicadas.

(1.5 puntos)

6.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz + 4x - 4z - 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

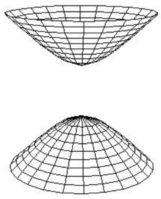
Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{H_{41}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonaliza y la signatura obtenida es:

$$(-, +, +; +) \iff (+, +, -; +)$$

Se trata por tanto de un hiperboloide de dos hojas.



(0.6 puntos)

7.– *Hallar la ecuación de una hipérbola con el centro en el punto $C = (1,1)$, un vértice $V = (2,2)$ y una asíntota paralela a la recta $x - 2y = 0$.*

Seguiremos los siguientes pasos:

i) El eje es la recta que une el centro y el vértice.

ii) Una asíntota es la recta paralela a $x - 2y = 0$ y pasando por el centro.

iii) La otra asíntota es la simétrica de la anterior respecto al eje calculado.

iv) Usaremos finalmente el haz de cónicas conocidas dos asíntotas e impondremos que la cónica buscada pasa por el vértice.

i) Comenzamos calculando el eje, la recta que une C y V:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{2-1} \iff x - y = 0.$$

ii) Calculamos una asíntota como la paralela a $x - 2y = 0$ pasando por $(1,1)$. Será de la forma:

$$x - 2y + c = 0.$$

Imponiendo que pase por $(1,1)$ queda:

$$1 - 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Es decir la recta: $x - 2y + 1 = 0$.

iii) La interserccción P del eje y la asíntota es el centro $(1, 1)$.

Tomamos un punto de la asíntota $A = (-1, 0)$ y calculamos su simétrico $A' = (a, b)$ respecto del eje. Deberá de cumplir:

$$\frac{A + A'}{2} \in eje \Rightarrow \left(\frac{a-1}{2}, \frac{b}{2}\right) \in eje \Rightarrow a - 1 - b = 0,$$

y

$$\vec{AA'} \perp eje \Rightarrow (a + 1, b)||(1, -1) \Rightarrow a + 1 = -b.$$

Resolviendo obtenemos:

$$A' = (a, b) = (0, -1).$$

La segunda asíntota es la recta PA':

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y + 1}{1 + 1} \iff 2x - y - 1 = 0.$$

iv) El haz de cónicas conocidas dos asíntotas es:

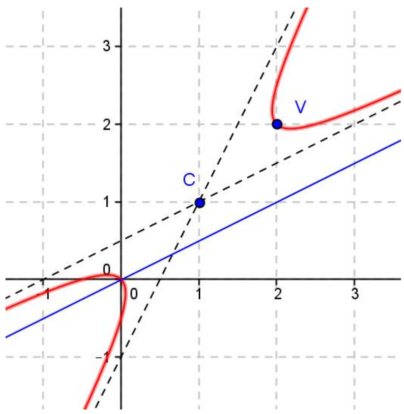
$$(x - 2y + 1)(2x - y - 1) + \lambda = 0.$$

Imponemos que pase por el vértice $V = (2, 2)$:

$$(2 - 2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 2 - 2 - 1) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

La ecuación queda:

$$(x - 2y + 1)(2x - y - 1) + 1 = 0 \iff 2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y = 0.$$



(1.5 puntos)