

1.— En $\mathbb{R}^3$ y dado $a \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 5ay^2 + 4z^2 + 2axy + 2ayz.$$

- (i) Clasificar w en función de los valores de a indicando además su rango y signatura.
- (ii) ¿Para qué valores de a existen vectores no nulos autoconjugados?.
- (iii) Para $a = 5$ encontrar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\vec{u}) < 0$.
- (iv) Para $a = 2$:
 - a) Probar que w define un producto escalar.
 - b) Dar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$, tomando como producto escalar el definido por w .

(1.7 puntos)

2.— En $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se sabe que f es un giro de 90 grados y g un giro de 30 grados. Sean A, B las matrices asociadas respectivamente a f y g con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) $A \cdot B$ es la matriz de una transformación ortogonal.
- (ii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro.
- (iii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.
- (iv) Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.
- (v) $A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.

(1.5 puntos)

3.— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

(1.5 puntos)

4.— Dada la curva de ecuación

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

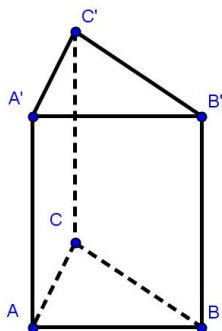
- (i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida.
- (ii) Hallar el punto cuya recta polar es $x - 1 = 0$.
- (iii) Hallar los focos.

(1.7 puntos)

5. En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices $ABCA'B'C'$. Se sabe que:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad \text{Volumen} = 2,$$

y que el plano $x = 0$ no corta al prisma.



- (i) Calcular el área del prisma.
- (ii) Calcular las coordenadas de los vértices A', B', C' . ¿Son únicas?.
- (iii) Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices A, B, C respectivamente en B, C, A . En caso afirmativo hallar el eje de giro.

(1.5 puntos)

6. Dada la cuádrica de ecuación:

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz + 4x - 4z - 1 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

7. Hallar la ecuación de una hipérbola con el centro en el punto $C = (1, 1)$, un vértice $V = (2, 2)$ y una asíntota paralela a la recta $x - 2y = 0$.

(1.5 puntos)

1.— En $\mathbb{R}^3$ e dado $a \in \mathbb{R}$ se considera a forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 5ay^2 + 4z^2 + 2axy + 2ayz.$$

- (i) Clasificar w en función dos valores de a indicando ademais o seu rango e a súa signatura.
- (ii) Para que valores de a existen vectores non nulos autoconxugados?.
- (iii) Para $a = 5$ atopar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\vec{u}) < 0$.
- (iv) Para $a = 2$:
 - a) Probar que w define un produto escalar.
 - b) Dar a matriz asociada respecto da base canónica da proxección ortogonal sobre o subespazo $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$, tomando como produto escalar o definido por w .

(1.7 puntos)

2.— En $\mathbb{R}^3$ dotado do produto escalar usual e tomando como orientación positiva a dada pola base canónica se consideran as transformacións ortogonales $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se sabe que f é un xiro de 90 grados e g un xiro de 30 grados. Sexan A, B as matrices asociadas respectivamente a f e g con respecto á base canónica. Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmacións:

- (i) $A \cdot B$ é a matriz dunha transformación ortogonal.
- (ii) $A \cdot B$ é a matriz dun xiro.
- (iii) $A \cdot B$ é a matriz dun xiro de 120 grados.
- (iv) Se f e g teñen o mesmo eixo de xiro, $A \cdot B$ é a matriz dun xiro de 120 grados.
- (v) $A \cdot B$ pode ser a matriz dun xiro de 60 grados.

(1.5 puntos)

3.— No plano afín atopar as ecuacións dun xiro que leva os puntos $A = (-1, 4)$ e $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ e $B' = (5, 3)$. Indicar o centro e ángulo de xiro, considerando coma orientación positiva a dada pola base canónica.

(1.5 puntos)

4.— Dada a curva de ecuación

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

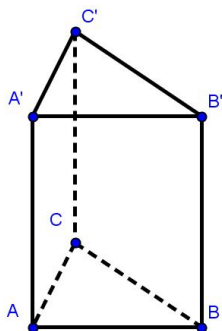
- (i) Clasificar a cónica e dar a súa ecuación reducida.
- (ii) Atopar o punto que ten por recta polar $x - 1 = 0$.
- (iii) Atopar os focos.

(1.7 puntos)

5.— No espazo afín se considera o prisma recto triangular de vértices $ABCA'B'C'$. Se sabe que:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad \text{Volumen} = 2,$$

e que o plano $x = 0$ non corta ó prisma.



- (i) Calcular a área do prisma.
- (ii) Calcular as coordenadas dos vértices A', B', C' . Son únicas?.
- (iii) Decidir razoadamente se existe un xiro que leve os vértices A, B, C respectivamente en B, C, A . En caso afirmativo atopar o eixo de xiro.

(1.5 puntos)

6.— Dada a cuádrica de ecuación:

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz + 4x - 4z - 1 = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)

7.— Atopar a ecuación dunha hipérbola co centro no punto $C = (1, 1)$, un vértice $V = (2, 2)$ e unha asíntota paralela á recta $x - 2y = 0$.

(1.5 puntos)
